Návrh číslicových systémů (INC)

Otto Fučík

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta informačních technologií
Božetěchova 2, 612 66 Brno

Použitá literatura

N. Frištacký, M. Kolesár, J. Kolenička a J. Hlavatý: „Logické systémy", SNTL Praha, 1986
M. Eysselt: „Logické systémy", SNTL Praha, skriptum VUT v Brně, 1985
J. F. Wakerly: „Digital Design. Principles and Practices", Prentice Hall, ISBN 0-13-769191-2, 2000
V. P. Nelson, H.T.Nagle, B.D.Carroll, J.D.Irwin: „Digital Logic Circuit Analysis & Design", ISBN 0-13-463894-8, 1995
T.L.Floyd: „Digital Fundamentals", Prentice Hall, ISBN 0-13-080850-4, 2000

Minimalizace

Úvod

- Optimalizace číslicových obvodů podle různých kritérií
  - Typicky minimalizace kriteriální funkce
- Kritéria minimalizace
  - Velikost obvodu (počet hradel, plocha na čipu)
  - Zpoždění obvodu (rychlost, výkonnost)
  - Počet proměnných (počet vodičů)
  - Příkon, atd.
- Model (reprezentace) logické funkce
  - Výraz, tabulka, graf, mapa, Vennův diagram
- Metody
  - Algebraické, mapové, Quine-McCluskey + Petrickova funkce, Espresso, …

- Příklad
  - Funkce F(x,y,z) je definována pravdivostní tabulkou

s	x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

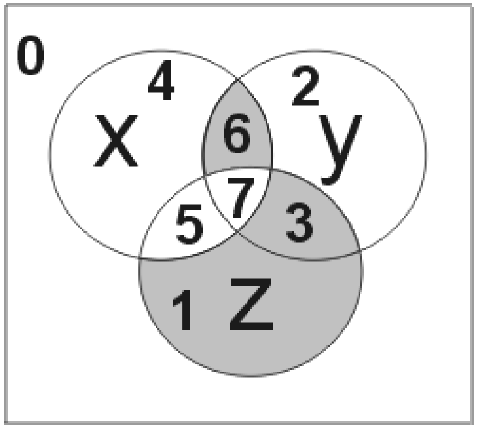
- Minimalizace funkce algebraicky

$$F(x,y,z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z}$$

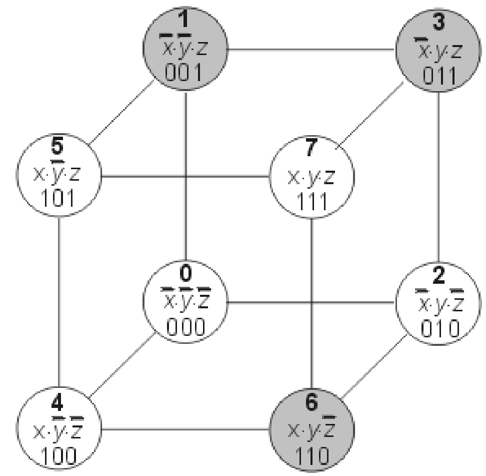
$$= \overline{x} \cdot z \cdot (y + \overline{y}) + x \cdot y \cdot \overline{z}$$

$$= \overline{x} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z}$$

- Vennův diagram



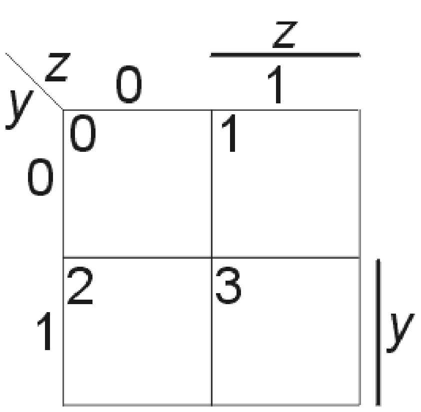
- Jednotková krychle

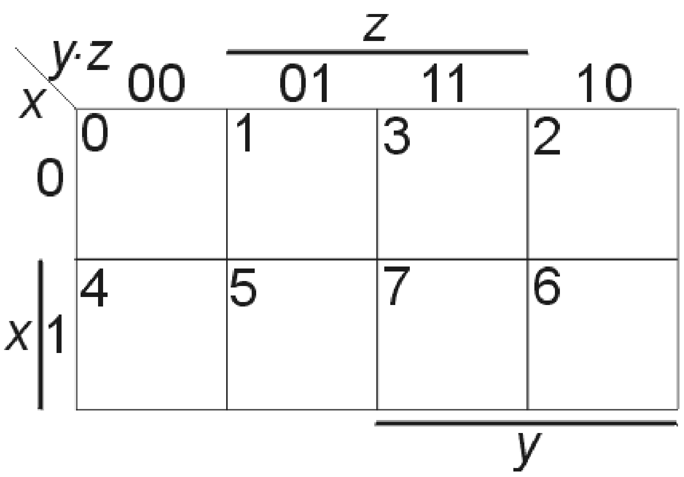


- Zvýrazněny jsou stavy, ve kterých jsou pravdivostní hodnoty funkce F(x,y,z) rovny log. 1 (tedy stavy 1, 3 a 6)
- Stavy 1-3 se liší v jedné proměnné
  - Lze tedy eliminovat proměnnou, jejíž váha je rovna rozdílu hodnot příslušných stavů
  - 3 – 1 = 2, což odpovídá váze proměnné, kterou můžeme eliminovat (proměnná y)

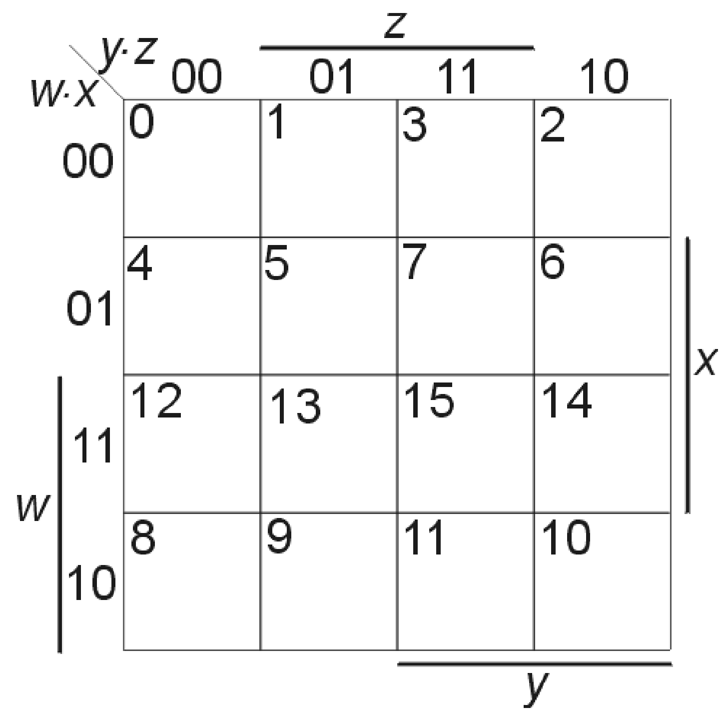
Logická mapa

- Reprezentace log. funkce maticově
- Marquandova (Svobodova) mapa
  - Při otočení přiřazení proměnných o 180° kolem středu mapy získáme přiřazení inverzní
- Karnaughova mapa
  - Sousedním políčkům jsou přiřazeny sousedné kombinace vstupních stavů (liší se v jedné proměnné)
- Pozn.: mapy mohou být různě pootočeny
- Příklady





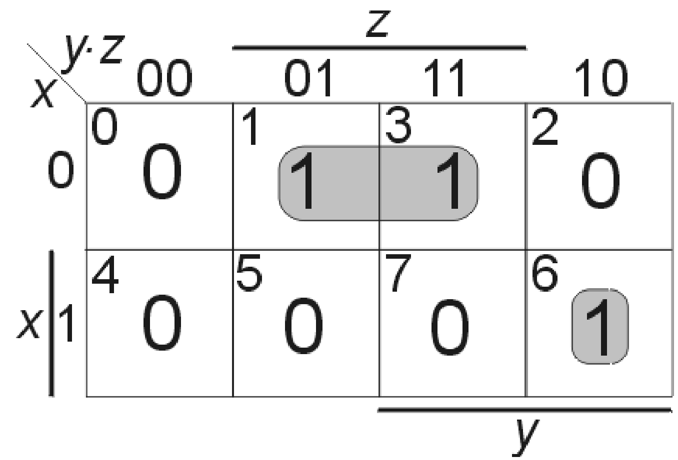
- Platí
  - V buňkách pod pruhem má daná proměnná hodnotu log. 1
  - V buňkách mimo pruh má daná proměnná hodnotu log. 0
  - Existuje řada možných nákresů K mapy (umístění proměnných…)
  - Buňky si též můžeme označit binárním kódem odpovídajícím jednotlivým kombinacím vstupních proměnných
  - Důležité je dodržet pravidlo, že se sousední buňky liší v jedné proměnné
- Příklad
  - Mapa pro 4 proměnné



Příklad minimalizace

- Funkce F(x,y,z)

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

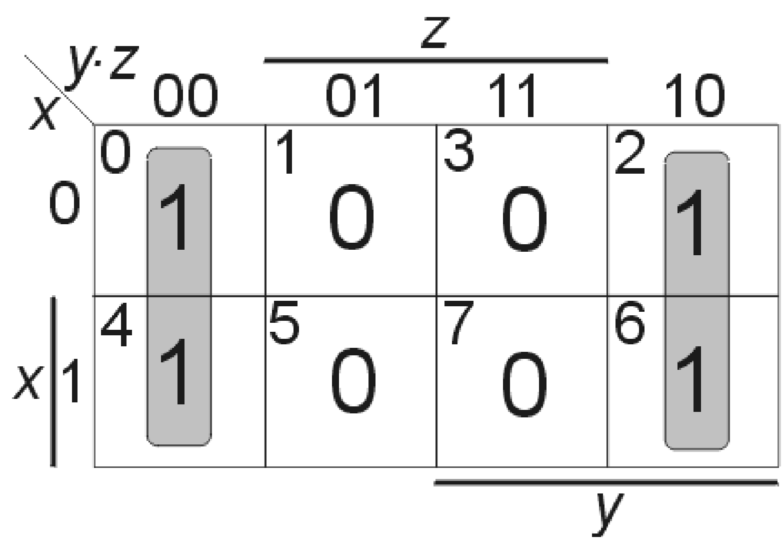


$$F(x,y,z) = \overline{x} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z}$$

- Postup minimalizace
  - Hledáme sousední buňky, ve kterých nabývá funkce hodnotu log. 1
  - Sdružením těchto buněk eliminujeme proměnnou, jejíž hodnota se v těchto buňkách mění – *y*
    - Dvojice 1-3 leží pod pruhem proměnné *z* a mimo pruh *x* (= komplement *x*) – kombinace odpovídající stavovému indexu 6 zůstává nezměněna

- Sdružíme-li buňky 0-4 a 2-6
  - Eliminujeme proměnnou *x*

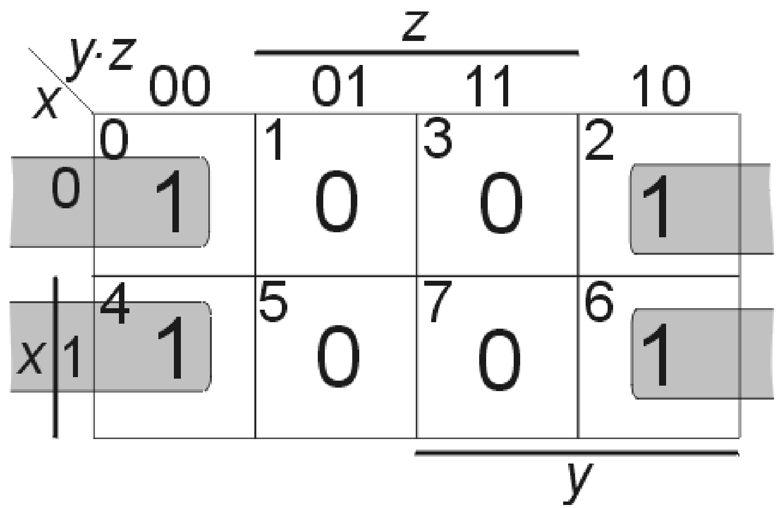
s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0



$$F(x,y,z) = \overline{y} \cdot \overline{z} + y \cdot \overline{z}$$

- Sdružíme-li buňky 0-2 a 4-6
  - Eliminujeme proměnnou *y*

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

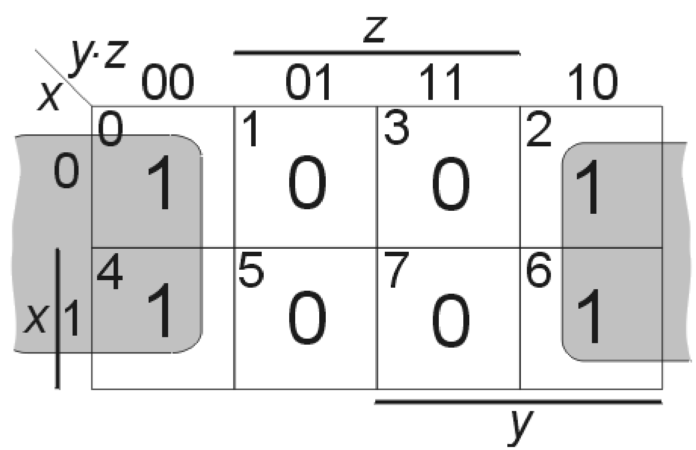


$$F(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{z}$$

Příklad minimalizace více proměnných – 3/3

- Sdružíme-li buňky 0-2-4-6
  - Eliminujeme proměnné *x* a *y*

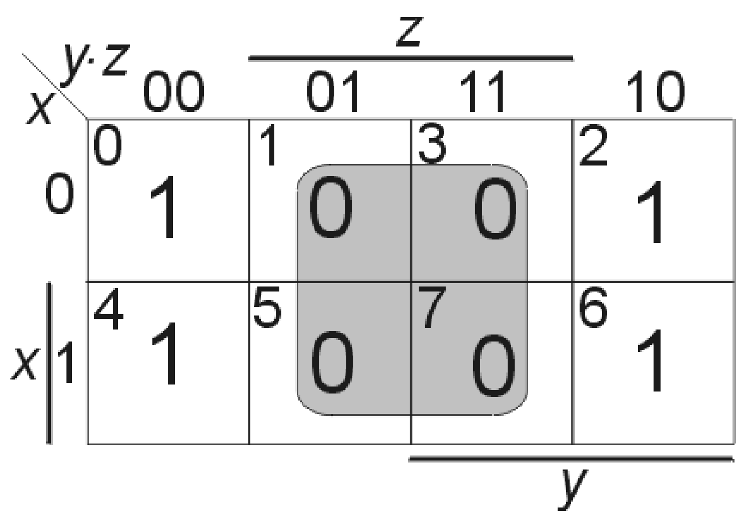
s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0



$$F(x, y, z) = \overline{z}$$

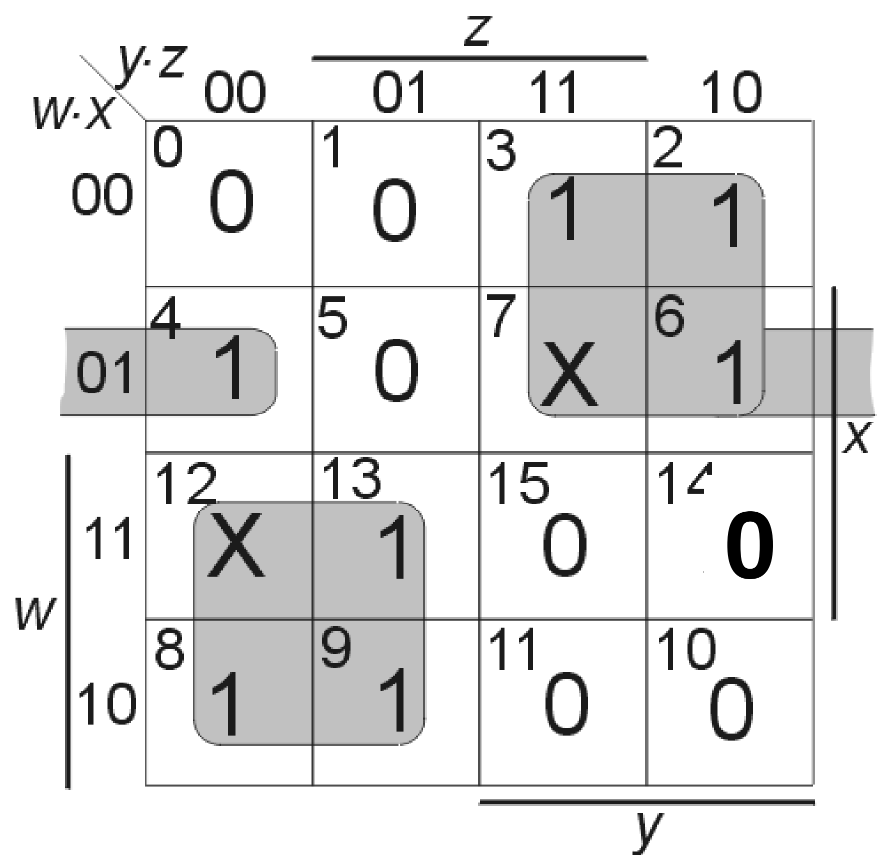
- Karnaughova mapa
  - Tvoří se obdobně jako v případě disjunktní formy s tím rozdílem, že se v mapě se sdružují log. 0 a ne log. 1
  - Proměnné se negují a výsledek se zapisuje v konjunktní formě

$$F(x, y, z) = \&(1,3,5,7)$$



  - Příklad
    - F(x,y,z) = not(z)

- Karnaughova mapa



$$F(w,x,y,z) = \overline{w}\cdot y + w\cdot\overline{y} + \overline{w}\cdot x\cdot\overline{z}$$

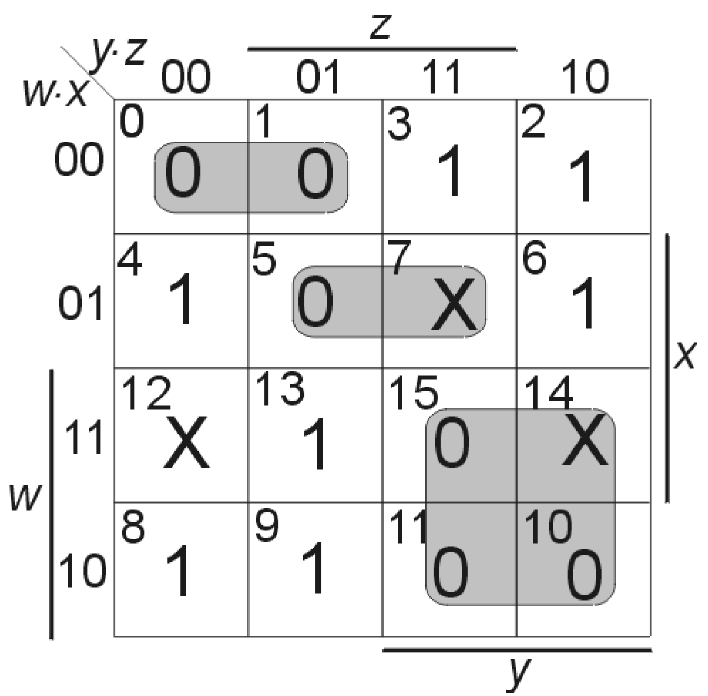
s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

- ÚNKF

$$F(w,x,y,z) = \wedge(0,1,5,10,11,15) \cdot X(7,12,14)$$

$$= \&(0,1,5,10,11,15) \cdot X(7,12,14)$$

$$= \Pi M(0,1,5,10,11,15) \cdot X(7,12,14)$$



s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	x
15	1	1	1	1	0

- Karnaughova mapa
  - Indexy políček jsou uspořádány tak, aby se lišily v jednom bitu – příslušné proměnné jsou pak sousedné a lze je eliminovat

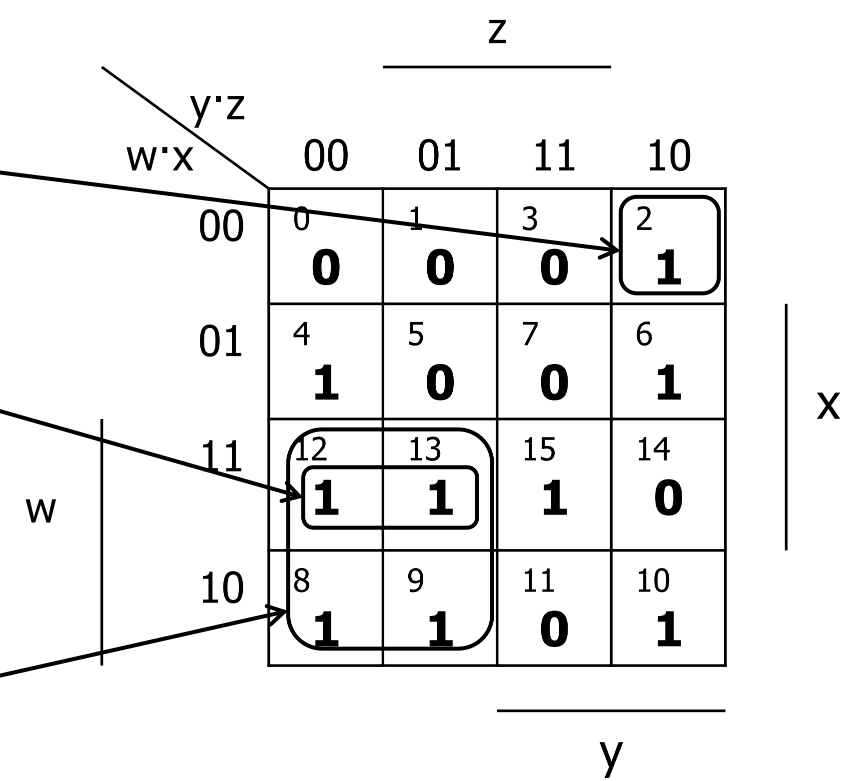
				z		
	w·x \ y·z	00	01	11	10	
	00	0 **0**	1 **0**	3 **0**	2 **1**	
	01	4 **1**	5 **0**	7 **1**	6 **0**	x
w	11	12 **0**	13 **1**	15 **0**	14 **1**	x
w	10	8 **1**	9 **0**	11 **1**	10 **0**	
				y	y	

- Marquandova (Svobodova) mapa
  - Indexy políček jsou v přímém kódu – sousedné proměnné se hledají obtížněji než u Karnaughovy mapy

			z		z	
	w·x \ y·z	00	01	10	11	
	00	0 **0**	1 **0**	2 **1**	3 **0**	
	01	4 **1**	5 **0**	6 **0**	7 **1**	x
w	10	8 **1**	9 **0**	10 **0**	11 **1**	
w	11	12 **0**	13 **1**	14 **1**	15 **0**	x
				y	y	

Terminologie

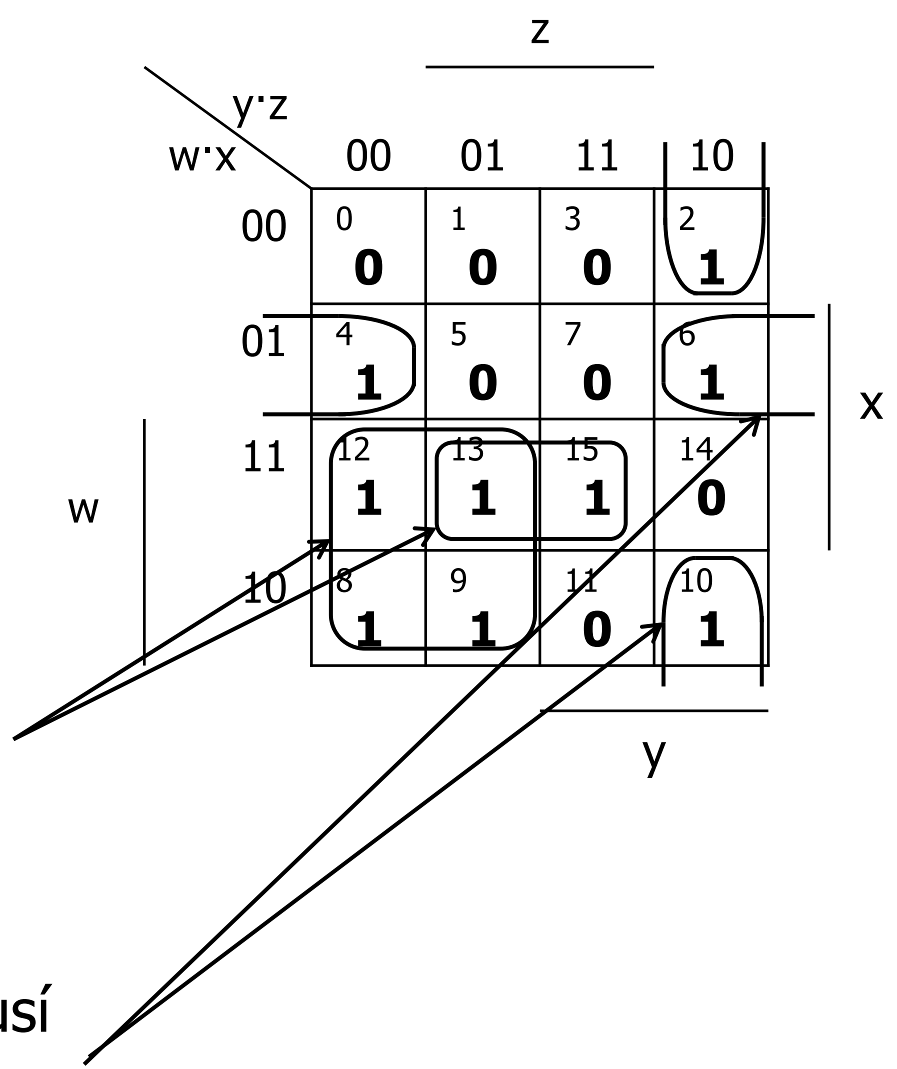
- Úplný implikant – term ÚNDF, který obsahuje všechny proměnné
- Pokrácený (částečně zkrácený) implikant, který má některé sousedné proměnné eliminované
- Zkrácený implikant – má všechny sousední proměnné eliminované; po odstranění jakékoliv další proměnné přestává být implikantem odvod sestavený ze zkrácených implikantů nemá hazardy (více viz dále)



- Tvrzení platí duálně
  - Když zaměníme implikant pro ÚNDF za implicent pro ÚNKF

Terminologie

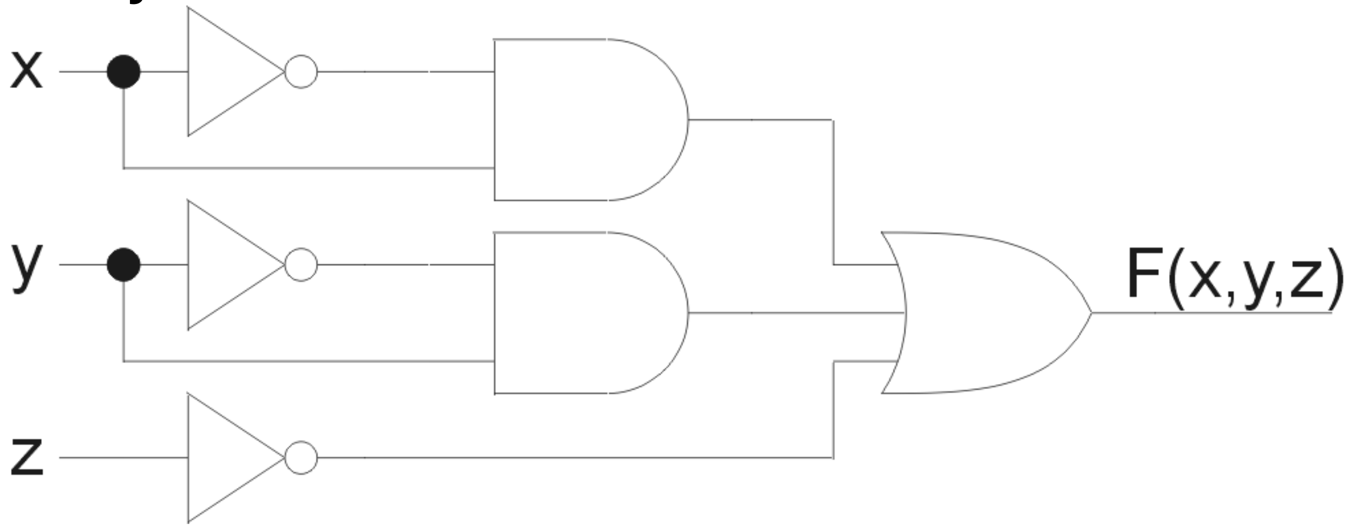
- Množina minimálních implikantů obsahuje zkrácené implikanty
- Minimální řešení funkce – jedna nebo více podmnožin množiny minimálních implikantů; může existovat více ekvivalentních řešení z nichž volíme dle dalších kritérií (viz např. obvody s více výstupy probírané dále)
- Nesporný implikant – implikant, který bude vždy součástí minimálního řešení
- Volitelný implikant – zkrácený implikant, který může, ale nemusí být součástí min. řešení, pokud lze použít jiný zkrácený implikant



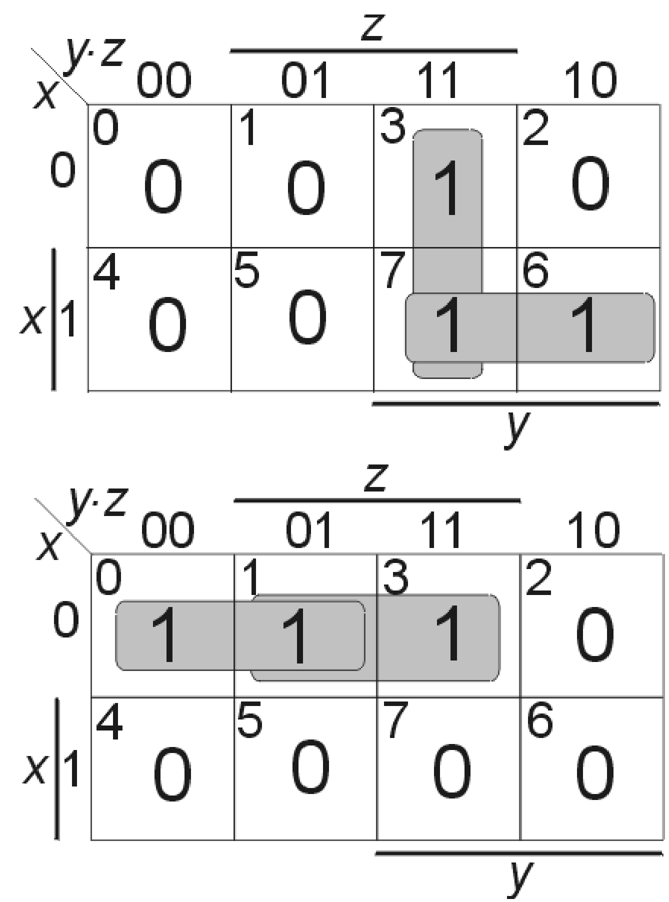
Hodnocení kvality minimalizace - metriky

- Kvalitu minimalizace log. výrazů lze hodnotit dle různých hledisek, např.:
  - Počet log. členů (AND, OR, NOT)
  - V průmyslu se používá nejčastěji počet log. členů NAND se dvěma vstupy
    - Převod pomocí DeMorganových pravidel
    - Původní použití pro tzv. hradlová pole obsahující pouze členy NAND
    - Lze srovnávat různé technologie
  - Počet spojů (vodičů) mezi log. obvody
    - Každý vodič má jisté fyzické rozměry (méně spojů = méně plochy)
  - Zpoždění
    - Každý log. člen a vodič má zpoždění
  - Příkon, atd.

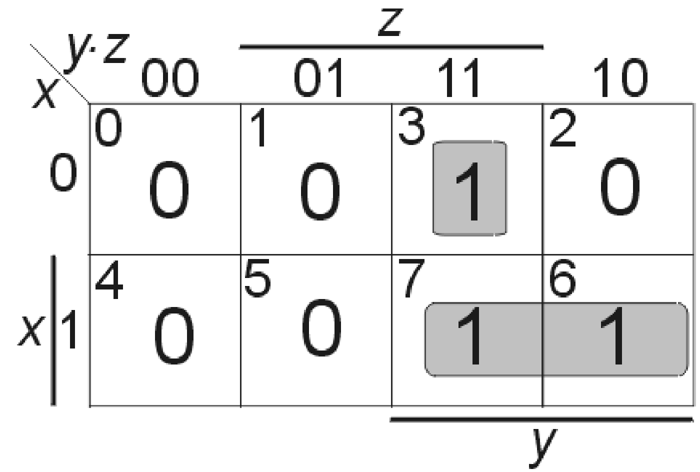
- V tomto kurzu budeme používat
  - P – počet log. členů (jednoduché, ne úplně objektivní)
  - S – počet spojů mezi log. členy včetně vstupů a výstupů
    - Stačí stanovit počet všech vstupů jednotlivých log. členů a přičíst celkový počet výstupů obvodu
  - T – zpoždění obvodu
    - Součet zpoždění [td] jednotlivých log. členů
    - Uvažujeme nejdelší cestu v obvodu
  - Příklad
    - P = 6
    - S = 11
    - T = 3td

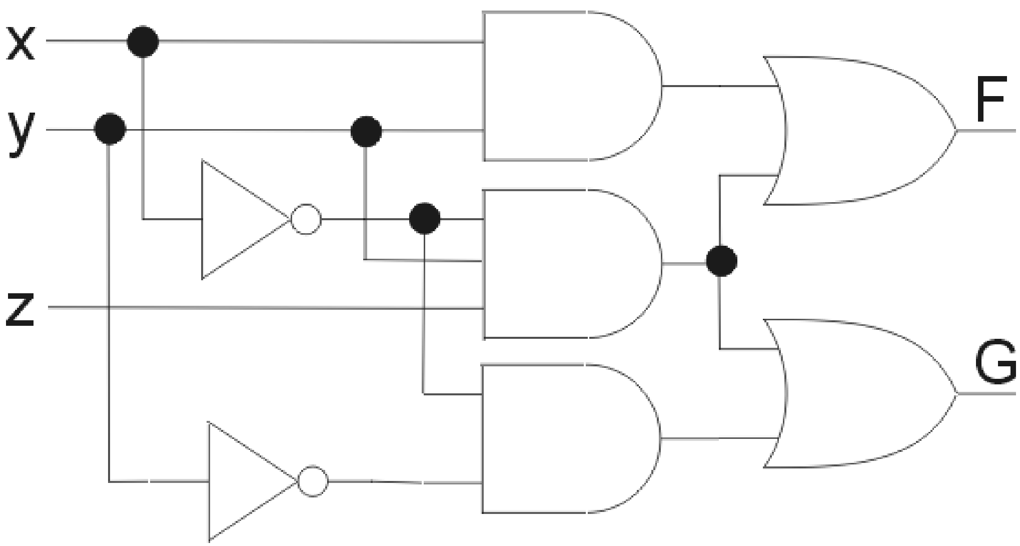


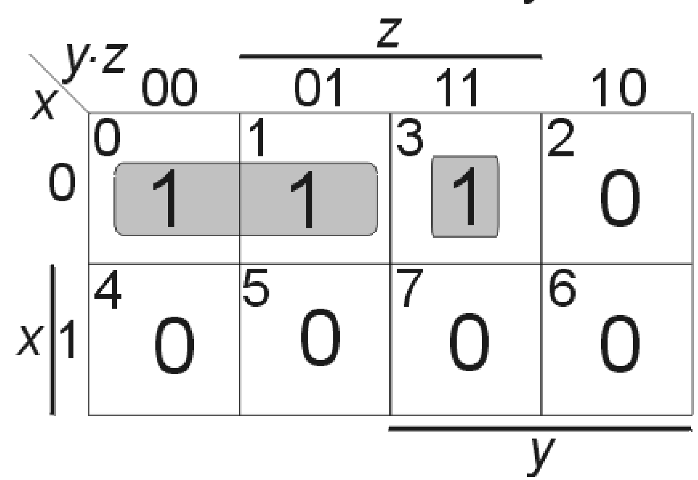
- Popis
  - Minimální pokrytí vrcholů více funkcí současně
  - Vede na log. členy sdílené více funkcemi
  - Sdílené log. členy nemusí představovat minimální možné řešení
  - V rozsáhlých obvodech může výrazně redukovat počet log. členů
  - Vzhledem k potenciálně značnému množství řešení (NP-uplný problém), je třeba často použít heuristických metod
- Příklad nalezení min. řešení nezávislých funkcí:
  - F(x,y,z)=Σm(3,6,7) a G(x,y,z)=Σm(0,1,3)
  - Celkem 8 log. členů



- Příklad nalezení min. řešení dvou funkcí se sdílenými log. členy:
  - F(x,y,z)=Σm(3,6,7)
  - G(x,y,z)=Σm(0,1,3)
  - Ušetřili jsme jeden log. člen







Minimalizační metody

- Algebraické
  - Postupnou aplikací axiomů a teorémů Booleovy algebry
- Grafické
  - Jednotková krychle
  - Vennův diagram
  - Mapy (Svobodova, Karnaughova)
- Algoritmické
  - Quine-McCluskey
  - Espresso
  - Atd.

Quine – McCluskey

- Tabulární metoda
  - Vhodná i pro funkce více než 5-6 proměnných, kde Karnaughovy mapy selhávají, a pro minimalizace obvodů s více výstupy
- Postup pro ÚNDF (SOP)
- Krok 1
  - Seřaď do řádků tabulky jednotlivé implikanty v pořadí dle počtu jedniček jejich binárních vah - skupiny sousedných implikantů
- Krok 2
  - Sepiš do skupin všechny sousedné implikanty mezi jednotlivými skupinami v tabulce – eliminovanou proměnnou označ pomlčkou
  - Opakuj krok 2 pro skupiny vytvořené v kroku 2 tam, kde existuje další sousednost
  - Pokud některý implikant nemá další sousedné termy, říkáme mu zkrácený implikant
  - Hledej minimálního řešení pokrytí dané funkce (např. pomocí mřížky implikantů)

Quine – McCluskey

- Příklad funkce F(w,x,y,z)=1(2,4,6,8,9,10,12,13,15)
  - Krok 1

Implikant	w.x.y.z	Skupina jedniček
2	0010	Skupina 1
4	0100	
8	1000	
6	0110	Skupina 2
9	1001	
10	1010	
12	1100	
13	1101	Skupina 3
15	1111	Skupina 4

- Krok 1

Zkrácené implikanty	w.x.y.z	Pokrytí
2	0010	✓
4	0100	✓
8	100	✓
6	0110	✓
9	1001	✓
10	1010	✓
12	1100	✓
13	1101	✓
15	1111	✓

- Do řádků tabulky zapisujme jednotlivé implikanty v pořadí dle jejich vah a počtu jedniček jejich binárních vah
- Tímto dostáváme skupiny sousedných implikantů
- Označujeme implikanty pokryté zkrácenými implikanty, viz krok 2

Quine – McCluskey

- Krok 2

Zkrácené implikanty	w.x.y.z	Pokrytí
2,6	0-10	PI2
2,10	-010	PI3
4,6	01-0	PI4
4,12	-100	PI5
8,9	100-	✓
8,10	10-0	PI6
8,12	1-00	✓
9,13	1-01	✓
12,13	110-	✓
13,15	11-1	PI7

- Hledáme a sepisujeme do skupin všechny sousedné implikanty
- V tabulce označíme eliminovanou proměnnou pomlčkou

Quine – McCluskey

- Krok 2 – druhá iterace

Zkrácené implikanty	w.x.y.z	Pokrytí
8,9,12,13	1-0-	PI1

  - Opakujeme krok 2 pro skupiny vytvořené v předchozí iteraci kroku 2 tam, kde existuje další sousednost
  - Pokud některý implikant nemá další sousedné termy, říkáme mu zkrácený implikant a označujeme ho PI
  - Implikanty, které jsou pokryty jinými, označujeme ✓
  - Končíme v okamžiku, kdy jsou všechnu implikanty pokryty alespoň jednou
- Výsledek
  - Máme celkem 7 zkrácených implikantů PI1=(8,9,12,13), PI2=(2,6), PI3=(2,10), PI4=(4,6), PI5=(4,12), PI6=(8,10), a PI7=(13,15)
  - Číslem je označen vrchol funkce, který je daným zkráceným implikantem pokryt

- Grafické znázornění pokrytí vrcholů funkce
  - Zkrácené implikanty PI1=(8,9,12,13), PI2=(2,6), PI3=(2,10), PI4=(4,6), PI5=(4,12), PI6=(8,10), a PI7=(13,15)
  - Hledáme nejmenší počet zkrácených implikantů pokrývajících všechny vrcholy
  - Může existovat více řešení

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				x	x		x	x	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	x

Mřížka implikantů

- Nejprve musíme zahrnout nesporné implikanty
  - Vrchol 15 je pokryt pouze zkráceným implikantem PI7 (plný kroužek), podobně vrchol 9 je pokryt PI1
  - Zkráceným implikantem PI1 jsou též pokryty vrcholy 8, 12 a 13, zkráceným implikantem PI7 je též pokryt vrchol 13
  - Zbývají vrcholy 2,4,6 a 10, které lze pokrýt různým způsobem

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				X	X		X	X	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								X	X

Mřížka implikantů

- Dále hledáme nejmenší pokrytí zbývajících vrcholů 2, 4, 6, a 10
  - Zkrácený implikant PI5 nepředstavuje dobrou volbu, neboť mu zbývá pokrýt pouze vrchol 4
  - Podobně, kráceném implikantu PI6 zbývá pokrýt pouze vrchol 10

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				x	x		x	x	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	x

- Nejlepší řešení
  - Představují PI3 a PI4
  - Vyžaduje nejmenší počet implikantů
  - PI3 a PI4 pokrývají zbylé vrcholy úplně

$$F(w,x,y,z) = PI1 + PI3 + PI4 + PI7$$
$$= (1-0-) + (-010) + (01-0) + (11-1)$$
$$= w\cdot\overline{y} + \overline{x}\cdot y\cdot\overline{z} + \overline{w}\cdot x\cdot\overline{z} + w\cdot x\cdot z$$

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				x	x		x	x	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	x

Petrickova funkce: Nalezení minimálního pokrytí

- Vhodným postupem najdi všechny zkrácené implikanty – např. pomocí Karnaughovy mapy či Quine – McCluskey
- Např. pomocí mřížky implikantů nalezni všechny nesporné implikanty
- Pro zbývající zkrácené implikantů napiš normální konjunktní formou logický výraz, reprezentující všechna možná pokrytí následovně:
  - Pro každý nepokrytý implikant zapiš výraz – sumu zkrácených implikantů, které jej pokrývají
  - Výsledné sumy zapiš jako součin – vznikne konjunktní forma
- Vzniklý zápis v konjunktní formě
  - Přepiš na disjunktní zápis prostým roznásobením
  - Zjednoduš pomocí teorémů Booleovy algebry
  - Každý vzniklý term představuje jedno možné pokrytí
- Nalezni pokrytí s nejnižší cenou
  - Cenou rozumíme počet zkrácených implikantů a počet proměnných v každém zkráceném implikantu

- Funkce umožňuje nalezení optimálního řešení, ale její složitost narůstá s počtem zkrácených implikantů
- Příklad
  - Zkrácené implikanty PI1=(8,9,12,13), PI2=(2,6), PI3=(2,10), PI4=(4,6), PI5=(4,12), PI6=(8,10), a PI7=(13,15)
  - Nalezneme nesporné implikanty – PI1=(8,9,12,13) a PI7=(13,15)

	2	4	6	8	9	10	12	13	15
PI1				x	x		x	x	
PI2	x		x						
PI3	x					x			
PI4		x	x						
PI5		x					x		
PI6				x		x			
PI7								x	x

- Příklad
  - Mřížku přepíšeme bez nesporných implikantů
  - Pro každý nepokrytý implikant zapíšeme sumu zkrácených implikantů, které jej pokrývají a výsledné sumy zapíšeme jako součin – vznikne konjunktní forma

	2	4	6	10
PI2	x		x	
PI3	x			x
PI4		x	x	
PI5		x		
PI6				x

$$C = (PI2 + PI3)\cdot(PI4 + PI5)\cdot(PI2 + PI4)\cdot(PI3 + PI6)$$

  - Přepíšeme na disjunktní formu a zjednodušíme

$$C = PI2\cdot PI3\cdot PI5 + PI3\cdot PI4 + PI2\cdot PI4\cdot PI6 + PI2\cdot PI5\cdot PI6$$

  - Vybereme pokrytí s nejnižší cenou (nejméně implikantů)

$$C_{\min} = PI3\cdot PI4$$