Návrh číslicových systémů (INC)

Otto Fučík

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta informačních technologií
Božetěchova 2, 612 66 Brno

Použitá literatura
N. Frištacký, M. Kolesár, J. Kolenička a J. Hlavatý: „Logické systémy", SNTL Praha, 1986
M. Eysselt: „Logické systémy", SNTL Praha, skriptum VUT v Brně, 1985
J. F. Wakerly: „Digital Design. Principles and Practices", Prentice Hall, ISBN 0-13-769191-2, 2000
V. P. Nelson, H.T.Nagle, B.D.Carroll, J.D.Irwin: „Digital Logic Circuit Analysis & Design", ISBN 0-13-463894-8, 1995
T.L.Floyd: „Digital Fundamentals", Prentice Hall, ISBN 0-13-080850-4, 2000

Logické obvody

Booleova algebra [G. Boole, 1854]

1. Distributivní komplementární svaz
   - Obsahuje alespoň dva prvky
2. Šestice (B, +, ·, ′, 0, 1)
   - „B"   neprázdná množina s alespoň dvěma různými prvky
   - „+"   logický součet (binární operace)
   - „·"   logický součin (binární operace)
   - „′ "   komplement (unární operace)
   - „0"   nejmenší (nulový) prvek (infimum)
   - „1"   největší (jedničkový) prvek (supremum)
   - Definuje množinu prvků, množinu operátorů, axiomy (postuláty) a teorémy (věty)

- Dvouhodnotová Booleova algebra
  - Axiomy a teorémy Booleovy algebry (1854) jsou definovány obecně
  - My se omezíme na dvouhodnotovou Booleovu algebru, ve které logické proměnné a výsledky logických funkcí mohou nabývat pouze hodnot 0 a 1 ($0 \neq 1$)

Logické operace

- Základní
  - Logický součet (disjunkce, spojení, sjednocení, OR): $x \vee y,\ x+y$
  - Logický součin (konjunkce, průsek, průnik, AND): $x \wedge y,\ x \cdot y$
  - Negace (inverze, doplněk, komplement, NOT): $x',\ \bar{x},\ \neg x,\ \sim x$
- Shefferova funkce (negace log. součinu, NAND): $x \uparrow y,\ \overline{x \cdot y}$
- Pierceova funkce (negace log. součtu, NOR): $x \downarrow y,\ \overline{x+y}$
- Exkluzivní log. součet: $x \oplus y,\ \overline{x \equiv y},\ \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$
  - Pro 2 proměnné též nonekvivalence (součet modulo 2)
- Ekvivalence (totožnost, rovnost, XNOR): $x \Leftrightarrow y,\ x \equiv y,\ \bar{x} \cdot \bar{y} + x \cdot y$
- Implikace: $x \Rightarrow y,\ x \rightarrow y,\ \bar{x} + y$
- Inhibice (negace implikace) $\overline{x \Rightarrow y},\ x \not\rightarrow y,\ x \cdot \bar{y}$
- Kontradikce: výsledkem je konstanta 0 (nezávisle na vstupech)
- Tautologie: výsledek je konstanta 1 (nezávisle na vstupech)
- Logické operace jsou realizovány logickými členy

Princip duality

- Pokud platí nějaké tvrzení, tak platí i duální tvrzení, které vznikne vzájemnou záměnou operací „+" a „·" a prvků 0 a 1

$$0 \rightarrow 1 \quad 1 \rightarrow 0 \quad "+" \rightarrow "\cdot" \quad "\cdot" \rightarrow "+"$$

- Příklad:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Poznámka
  - Pokud platí jisté tvrzení, není třeba dokazovat tvrzení duálního tvrzení

Přehled axiómů [E. V. Huntington, 1904] $a, b, c \in B$

- Uzavřenost (výsledky log. operací patří do množiny B)

  $(a+b) \in B$ (I a) $(a \cdot b) \in B$ (I b)

- Neutralita prvků 0 a 1 (identita)

  $a+0=a$ (II a) $a \cdot 1=a$ (II b)

- Zákony komutativní (komutativita)

  $a+b=b+a$ (III a) $a \cdot b=b \cdot a$ (III b)

- Zákony distributivní (distributivita)

  (IV a) $a+b \cdot c=(a+b) \cdot (a+c)$ (IV b) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$

- Existence komplementu (komplementárnost)

  $a \cdot a'=0$ (V a) $a+a'=1$ (V b)

- V množině B existují alespoň dva různé prvky (VI)

- Teorémy
  - Jsou odvozeny na základě axiomů Booleovy algebry a definují další užitečné vlastnosti
- Důkazy lze provést
  - Systematickou aplikací axiomů a již dříve dokázaných teorémů
  - Pomocí Vennových diagramů, atd.
- Příklad
  - Důkazu distributivního zákona pomocí úplné indukce

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Použitím úplné indukce
  - Postupně vyčíslujeme hodnoty výrazů pro všechny možné kombinace hodnot vstupních proměnných; pokud se vždy dosáhne správného výsledku, je dokázáno, že daný výraz platí

a	b	c	(b+c)	a·b	a·c	a·(b+c)	a·b+a·c
0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
0	0	1	1	0	0	**0**	**0**
0	1	0	1	0	0	**0**	**0**
0	1	1	1	0	0	**0**	**0**
1	0	0	0	0	0	**0**	**0**
1	0	1	1	0	1	**1**	**1**
1	1	0	1	1	0	**1**	**1**
1	1	1	1	1	1	**1**	**1**

- Jedinečnost 0 a 1
  - Prvek 0 je v axiomu $a+0=a$ (II a) jedinečný (VII a)
  - Prvek 1 je v axiomu $a\cdot 1=a$ (II b) jedinečný (VII b)
- Idempotence

$$a+a=a \quad \text{(VIII a)} \qquad a\cdot a=a \quad \text{(VIII b)}$$

- Agresivita 1 a 0

$$a+1=1 \quad \text{(IX a)} \qquad a\cdot 0=0 \quad \text{(IX b)}$$

- Absorpce

$$a+a\cdot b=a \quad \text{(X a)} \qquad a\cdot(a+b)=a \quad \text{(X b)}$$

- Existence jediného komplementu: a′ je plně určen a (XI)
- DeMorganovy zákony

$$(a+b)'=a'\cdot b' \quad \text{(XII a)} \qquad (a\cdot b)'=a'+b' \quad \text{(XII b)}$$

- Zákony asociativní (asociativita)

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad \text{(XIII a)} \qquad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \quad \text{(XIII b)}$$

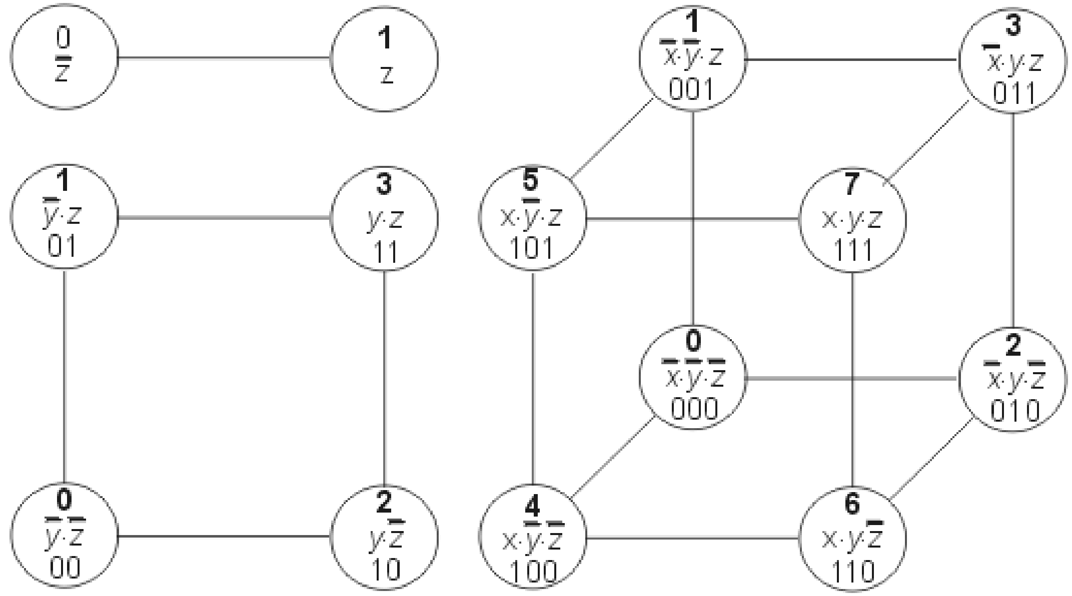
Logické proměnné, funkce a výrazy

- Logické proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$
  - Nabývají hodnot 0 a 1 (logické konstanty)
  - Budeme značit písmeny: A, B, C,…, a, b, c, …, x_1, x_2,…
  - Poznámka: pro jednodušší zápis budeme logický součin značit jak symboly „X·Y", tak „XY" – pozor na záměnu s proměnnou „XY"
- Logická funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je zobrazení $f:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$
  - Hodnota log. funkce je buď 1, nebo 0, v závislosti na hodnotách (0, 1) jednotlivých proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$
  - Pro *n* proměnných (každá má 2 možné hodnoty) máme 2^n možností, jak jim přiřadit hodnoty
  - Existuje celkem 2^{2^n} různých log. funkcí *n* proměnných
- Logický výraz (řetězec symbolů)
  - Obsahuje log. konstanty, log. proměnné a log. operátory
  - Log. výrazy lze upravovat a zjednodušovat s využitím Booleovy algebry – cílem je splnění daných kritérií (cena, rychlost, příkon atd.)

Reprezentace log. funkcí: Pravdivostní tabulka

- Normální báze – (x,y,z)
  - Proměnným jsou přiřazeny váhy mocnin báze 2
- Log. funkce – F(x,y,z)
  - Vstupní stav – kombinace vstupních log. proměnných (vstupů)
  - Stavový index – s ... desítkové číslo udávající hodnotu log. stavu
  - Neurčený stav – X (anglicky don't care)
    - Stav, kdy není třeba určit, zda při daném vstupním stavu má pravdivostní hodnota funkce F(x,y,z) hodnotu 0, nebo 1
  - Log. funkce určená – pro všechny možné vstupní stavy existuje jednoznačné určení pravdivostních hodnot log. funkce F(x,y,z)

stavový index s	vstupní stav			pravdivostní hodnoty
	4	2	1	F(x,y,z)
	x	y	z	
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	X
6	1	1	0	1
7	1	1	1	X

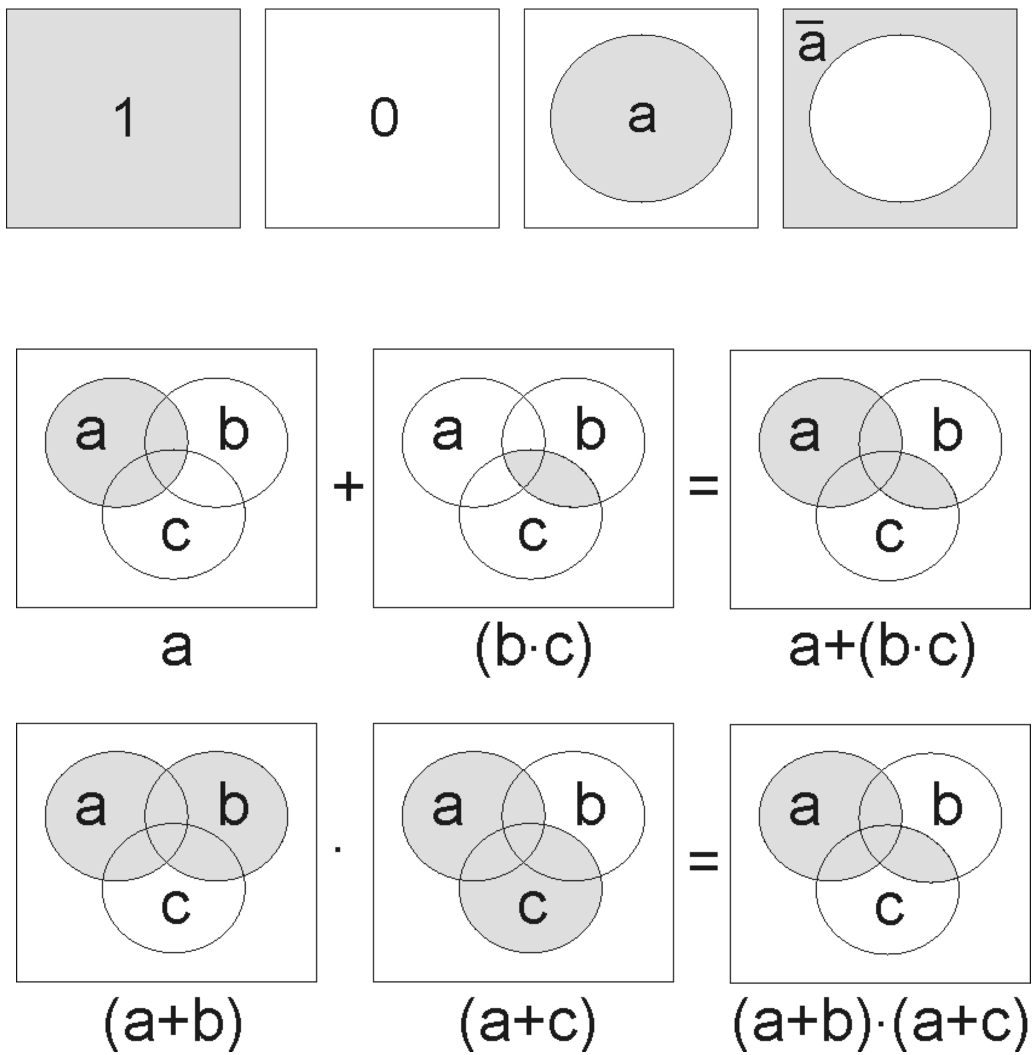


- Neorientovaný graf
- Reprezentace log. funkce N proměnných
  - S více než čtyřmi rozměry se špatně pracuje
- Uzly
  - Reprezentují hodnoty vstupního stavu
  - Počet uzlů je 2^N
- Hrany
  - Spojují uzly, které se liší pouze v jedné proměnné (sousednost)

- Význam
  - Proměnnou, ve které se liší uzly krychle, lze eliminovat
  - Např.: pro dvourozměrnou krychli a stavy 3 (binárně 11) a 2 (binárně 10) platí

$$yz + y\bar{z} = y$$

- Prvky množin jsou znázorněny jako uzavřené plochy
- Log. součet = sjednocení příslušných ploch
- Log. součin = průnik příslušných ploch
- Příklad:
  - Reprezentace distributivního zákona pomocí tzv. Vennových diagramů



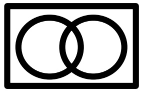
- Log. výrazy v disjunktní formě a pravdivostní tabulka

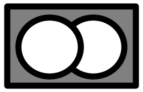
$$f_0 = 0$$
$$f_1 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)$$
$$f_2 = (x_1 \cdot \bar{x}_2)$$
$$f_3 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2)$$
$$f_4 = (\bar{x}_1 \cdot x_2)$$
$$f_5 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2)$$
$$f_6 = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2)$$
$$f_7 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2)$$
$$f_8 = (x_1 \cdot x_2)$$
$$f_9 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2)$$
$$f_{10} = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2)$$
$$f_{11} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2)$$
$$f_{12} = (\bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2)$$
$$f_{13} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2)$$
$$f_{14} = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2)$$
$$f_{15} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = 1$$

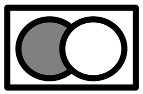
x_2	x_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	**0**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	**1**	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	**0**	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

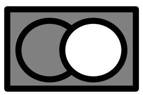
Všechny logické funkce 2 proměnných

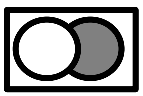
- Vennovy diagramy, logické funkce a operace

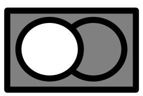
 Kontradikce $f_0 = 0$

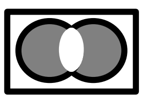
 Pierceova funkce (NOR) $f_1 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) = \overline{x_1 + x_2} = (x_1 \downarrow x_2)$

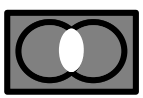
 Inhibice $f_2 = (x_1 \cdot \bar{x}_2) = (\overline{x_1 \Rightarrow x_2})$

 Negace (NOT) $f_3 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2) = \bar{x}_2$

 Inhibice $f_4 = (\bar{x}_1 \cdot x_2) = (\overline{x_2 \Rightarrow x_1})$

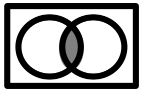
 Negace (NOT) $f_5 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2) = \bar{x}_1$

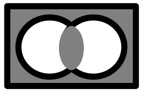
 Exkluzívní součet (XOR) $f_6 = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2) = (x_1 \oplus x_2)$

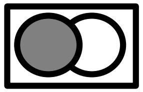
 Shefferova fce (NAND) $f_7 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2) = (\overline{x_1 \cdot x_2}) = (x_1 \uparrow x_2)$

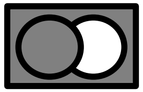
Všechny logické funkce 2 proměnných

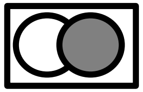
- Vennovy diagramy, logické funkce a operace

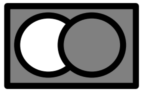

Log. součin (AND) $f_8 = (x_1 \cdot x_2)$

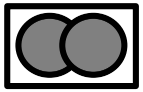

Ekvivalence (XNOR) $f_9 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2) = (x_1 \Leftrightarrow x_2)$

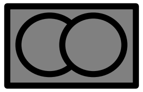

Identita $f_{10} = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2) = x_1$


Implikace $f_{11} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2) = (x_1 + \bar{x}_2) = (x_2 \Rightarrow x_1)$


Identita $f_{12} = (\bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = x_2$


Implikace $f_{13} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = (\bar{x}_1 + x_2) = (x_1 \Rightarrow x_2)$


Log. součet (OR) $f_{14} = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = (x_1 + x_2)$


Tautologie $f_{15} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = 1$

Normální formy – ÚNDF (SOP)

- Term
  - Uspořádaná skupina proměnných a operátorů
- Úplná normální disjunktní forma (ÚNDF)
  - Suma součinů (anglicky též Sum Of Products – SOP)
  - Termům říkáme implikanty (mintermy)
- Částečně minimalizovaná ÚNDF
  - Zkrácená normální disjunktní forma (ZNDF)
- Minimální možné řešení
  - Minimální normální disjunktní forma (MNDF)

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$F(x,y,z) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot y\cdot\overline{z} + x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + x\cdot y\cdot\overline{z}$$

$$= \overline{x}\cdot\overline{z} + x\cdot\overline{z}$$

$$= \overline{z}$$

- Součin sum
  - Sepisujeme kombinace vstupních proměnných, ve kterých nabývá funkce hodnoty log. 0
  - Proměnné zapisujeme komplementárně
- Úplná normální konjunktní forma (ÚNKF)
  - Součin sum (anglicky Product Of Sums – POS)
  - Termům zde říkáme implicenty (maxtermy)
- Částečně minimalizovaná
  - Zkrácená normální konjunktní forma (ZNKF)
- Minimální řešení
  - Minimální normální konjunktní forma (MNKF)

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$F(x,y,z)$$
$$=(x+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+\overline{z})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$
$$=(x+\overline{z})\cdot(\overline{x}+\overline{z})$$
$$=\overline{z}$$

Zkrácený způsob zápisu normálních forem

- Nezkrácená ÚNDF

$$F(x,y,z)=\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot y\cdot\overline{z}+x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+x\cdot y\cdot\overline{z}$$

- Varianty zkráceného zápisu ÚNDF

$$F(x,y,z)=\vee(0,2,4,6)=1(0,2,4,6)=\Sigma m(0,2,4,6)$$

  - V závorce jsou uvedeny stavové indexy, pro které nabývá funkce hodnoty log. 1
  - Před závorkou máme označení disjunktní formy pomocí operátoru log. součtu či sumy implikantů (m jako minterm)
- Nezkrácená ÚNKF

$$F(x,y,z)=(x+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+\overline{z})\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

- Varianty zkráceného zápisu ÚNKF
  - V závorce jsou uvedeny stavové indexy, pro které nabývá funkce hodnoty log. 0
  - Před závorkou máme označení konjunktní formy pomocí operátoru log. součinu či součinu implicentů (M jako Maxterm).

$$F(x,y,z)=\wedge(1,3,5,7)=\&(1,3,5,7)=\Pi M(1,3,5,7)$$

Neúplně definované funkce

- Pokud log. funkce nabývá pro nějakou kombinaci vstupních proměnných neurčené hodnoty X, pak ji můžeme interpretovat jako hodnotu log. 1 či log. 0
  - Toho lze z výhodou využít při minimalizaci funkce
- Příklad možného zkrácení ÚNDF zápisu neúplně definované funkce

$$F(w,x,y,z) = \vee(2,3,4,6,8,9,13) + x(7,12)$$
$$= 1(2,3,4,6,8,9,13) + x(7,12)$$
$$= \Sigma m((2,3,4,6,8,9,13) + x(7,12))$$

s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Logické členy OR, AND a NOT

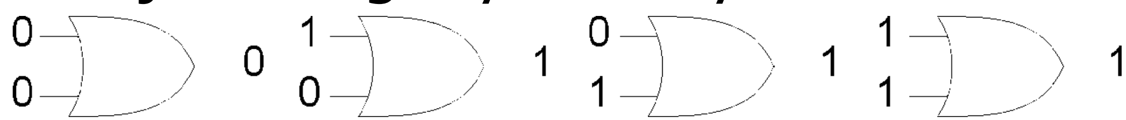
- Definiční tabulka
  - Logický součet

+	0	1
0	0	1
1	1	1

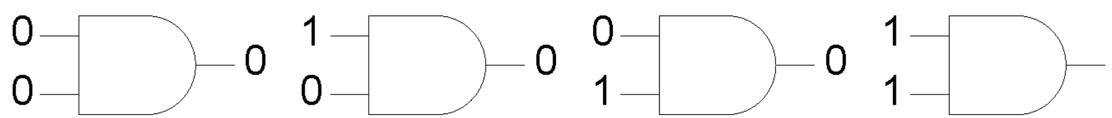
Logický součin

·	0	1
0	0	0
1	0	1

- Logické operace se realizují tzv. logickými členy
  - „+" … log. člen OR



  - „·" … log. člen AND



- Chování log. členů lze definovat např. pravdivostní tabulkou
  - OR

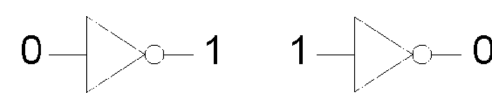
a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

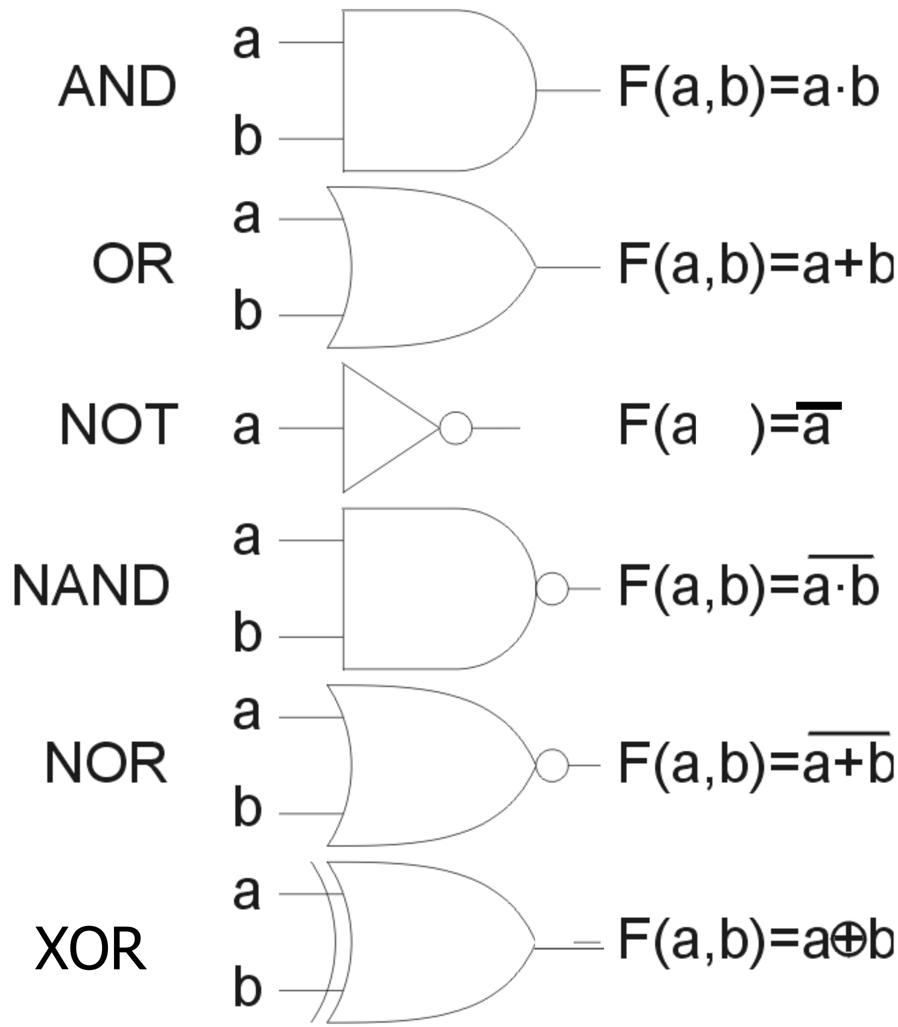
a	b	a·b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NOT

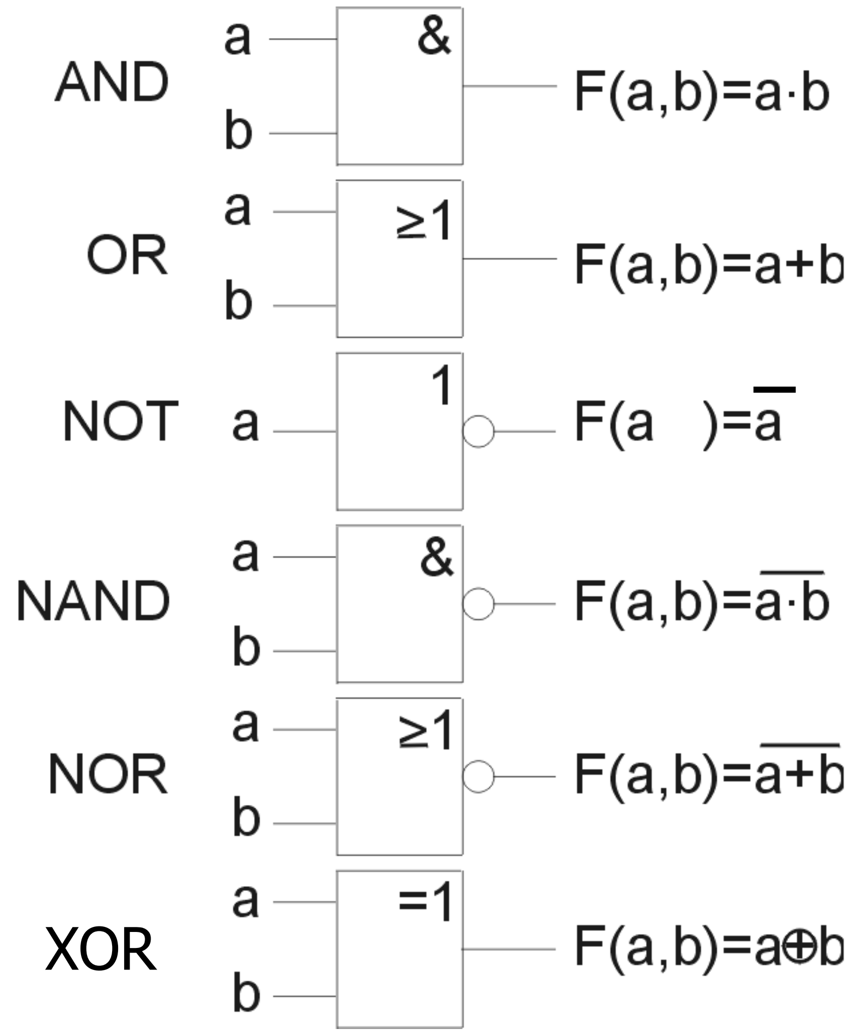
a	not(a)
0	1
1	0



- Standard IEEE/ANSI Std 91-1984



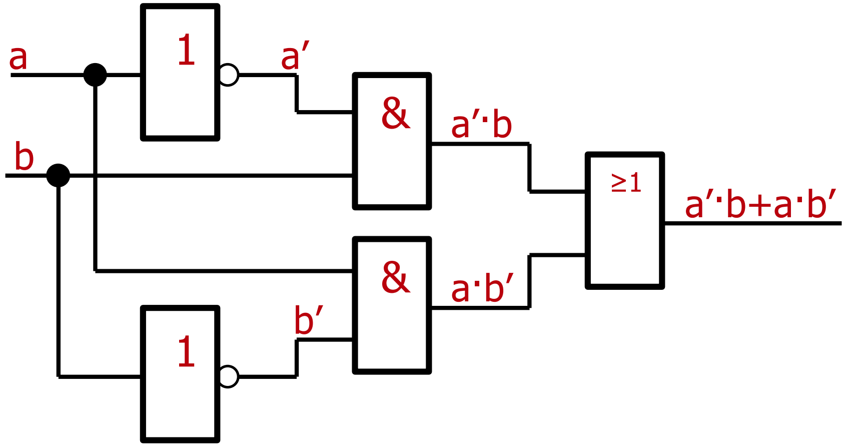
- Standard IEC 60617-12



Od logické funkce k elektronickému obvodu

- Postupným nahrazením operací ve výrazech za logické členy
- Postupujeme od nejvnitřnějších operací (obvykle komplementy proměnných)
- Vstupy a výstupy log. členů propojeny skrze vodiče
- Spojení dvou vodičů označeno černým puntíkem
- Příklad

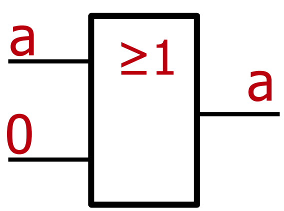
$$(\bar{a} \cdot b) + (a \cdot \bar{b})$$

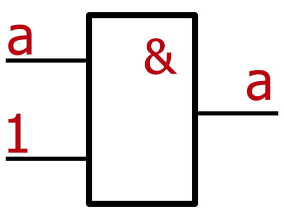


- Neutralita prvků 0 a 1

$$a + 0 = a \quad \text{(II a)} \qquad\qquad a \cdot 1 = a \quad \text{(II b)}$$

- Z hlediska případné realizace logických obvodů z log. členů tento axiom říká, že přičtení log. nuly, resp. vynásobení log. jedničkou, nezmění hodnotu proměnné
- Uvedenou operaci tedy není třeba realizovat a můžeme tak ušetřit příslušné log. členy

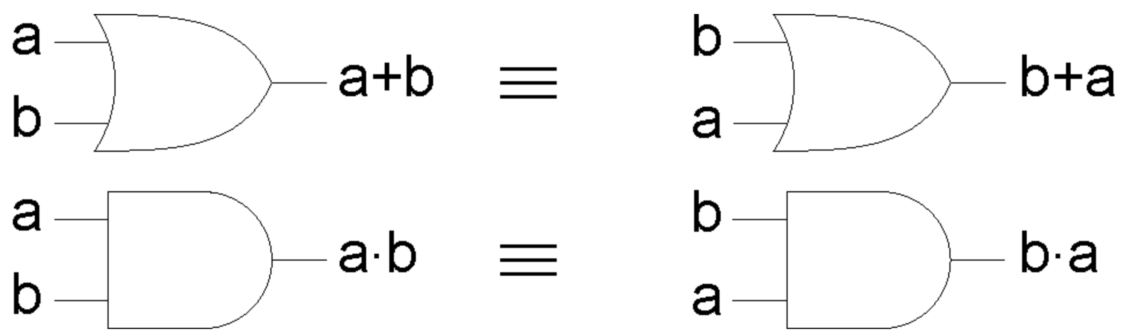




- Zákony komutativní

$$a + b = b + a \quad \text{(III a)} \qquad a \cdot b = b \cdot a \quad \text{(III b)}$$

- V případě realizace log. obvodů z log. členů AND a OR je jedno, na který ze vstupů přivedeme příslušnou log. proměnnou – jsou symetrické
- Máme tedy volnost při volbě vstupů příslušných log. členů, čehož se s výhodou využívá při implementaci log. obvodů, např. v integrovaných obvodech, na deskách s plošnými spoji apod.

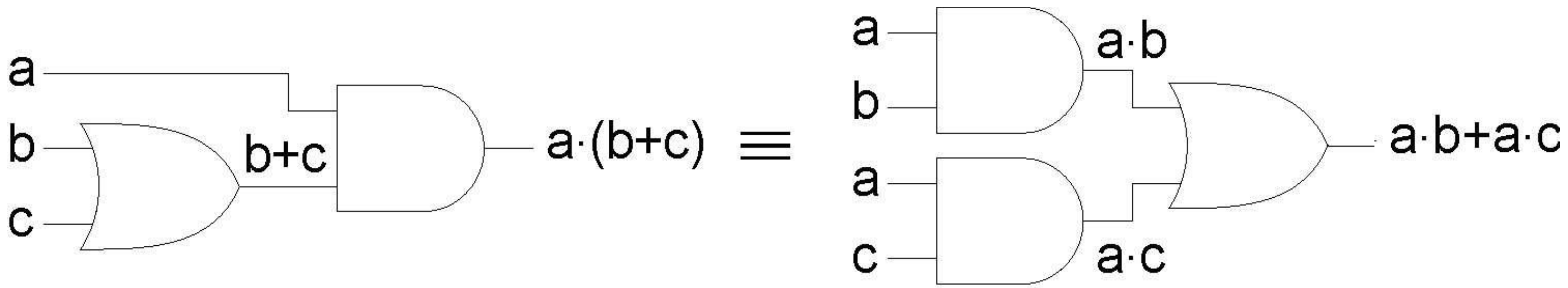


- Zákony distributivní

$$a+b\cdot c=(a+b)\cdot(a+c) \qquad \text{(IV a)}$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \qquad \text{(IV b)}$$

- Výrazy lze zjednodušovat eliminací společné proměnné
- Vidíme, že aplikací distributivního zákona můžeme ušetřit jeden log. člen AND se dvěma vstupy (1/3 log. členů) a dva vodiče (2/7 všech vodičů)



- Idempotence

$$a + a = a \quad \text{(VIII a)}$$

$$a \cdot a = a \quad \text{(VIII b)}$$

- Důkaz
  - Postupnou aplikací dříve uvedených zákonů

$$a + a = (a + a) \cdot 1$$
$$= (a + a) \cdot (a + \overline{a})$$
$$= a + a \cdot \overline{a}$$
$$= a + 0$$
$$= a$$

- Význam
  - Ve výrazech je možno zjednodušit výraz a ušetřit tak příslušný logický člen

Důkazy a využití teorémů

- Agresivita 0 a 1

$$a + 1 = 1 \quad \text{(IX a)}$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad \text{(IX b)}$$

- Důkaz

$$a + 1 = (a + 1) \cdot 1$$
$$= (a + 1) \cdot (a + \overline{a})$$
$$= a + 1 \cdot \overline{a}$$
$$= a + \overline{a}$$
$$= 1$$

- Význam
  - Eliminace zbytečných členů

Důkazy a využití teorémů

- Absorpce

$$a + a \cdot b = a \quad \text{(X a)}$$

$$a \cdot (a + b) = a \quad \text{(X b)}$$

- Důkaz

$$a + a \cdot b = a \cdot 1 + a \cdot b$$

$$= a \cdot (1 + b)$$

$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

- Význam
  - Eliminace přebytečné proměnné ve výrazu

- Existence jediného komplementu

- Důkaz
  - Předpokládejme, že dva prvky $x, y \in B$ mají vlastnost komplementu prvku *a*, tedy:
  - Platí (agresivita 0 a 1):

$$a \cdot x = 0 \quad a + x = 1$$

$$a \cdot y = 0 \quad a + y = 1$$

  - Platí (zákon distributivní):

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x = 1 \cdot x$$

$$x = (a + y) \cdot x$$

$$x = (a \cdot x) + (y \cdot x)$$

$$x = 0 + (y \cdot x)$$

$$x = y \cdot x$$

  - Platí tedy, že $x = y$, což je v rozporu s předpokladem

Důkazy a využití teorémů

- DeMorganovy zákony

$$a+b=(a'\cdot b')' \text{ (XII a)} \qquad a\cdot b=(a'+b')' \text{ (XII b)}$$

$$(a+b)'=a'\cdot b' \qquad (a\cdot b)'=a'+b'$$

- Zobecnění pro více proměnných

$$(a+b+c+\ldots)'=a'\cdot b'\cdot c'\ldots \qquad (a\cdot b\cdot c\ldots)'=a'+b'+c'+\ldots$$

- Důkaz (úplnou indukcí)

a	b	a+b	not(a+b)	not(a)	not(b)	not(a).not(b)
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

- Využití
  - Negace součtu lze nahradit součinem negací, resp. negace součinu součtem negací

- Zákony asociativní

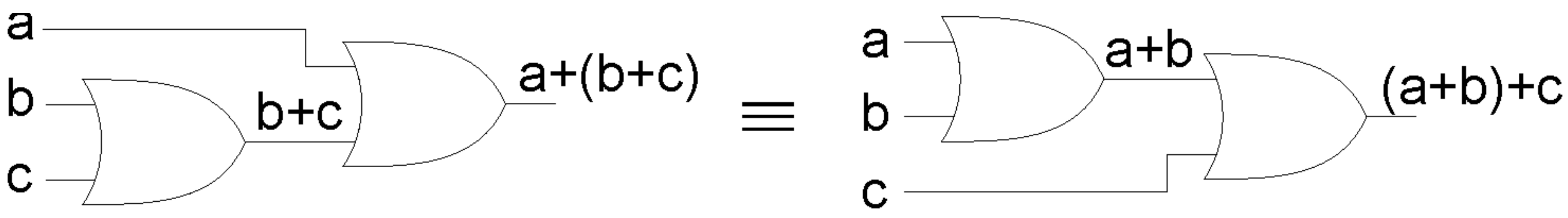
(XIII a)

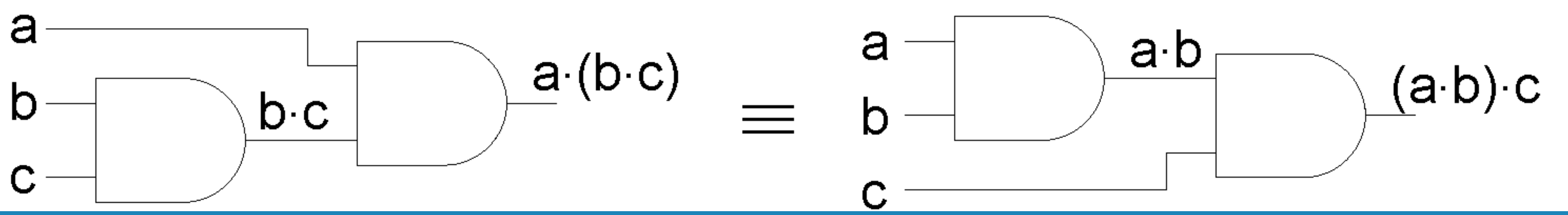
$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(XIII b)

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

- Využití
  - Nezáleží na pořadí vyčíslování operací log. součtu a součinu
  - Realizace log. operací i více proměnných než dvou může být provedena pouze s log. členy se dvěma vstupy





- Involuce (dvojitá negace)

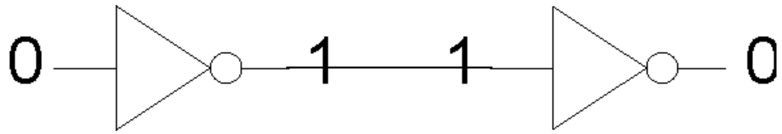
$$\overline{\overline{a}} = a$$

- Důkaz
  - Pomocí úplné indukce

$$\overline{\overline{1}} = \overline{0} = 1 \qquad \overline{\overline{0}} = \overline{1} = 0$$

$$a = 0 \qquad a = 1$$

- Využití
  - Není třeba dávat dva invertory za sebe



- Absorpce negace

$$a + a' \cdot b = a + b \qquad\qquad a \cdot (a' + b) = a \cdot b$$

- Důkaz

$$a + a' \cdot b = (a + a') \cdot (a + b)$$
$$= 1 \cdot (a + b)$$
$$= a + b$$

- Využití
  - Možnost eliminace přebytečného komplementu proměnné ve výrazu

- Sousednost (spojování, adjecency)

$$a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a \qquad (a+b)\cdot(a+\overline{b}) = a$$

- Důkaz

$$a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a \cdot (b + \overline{b})$$

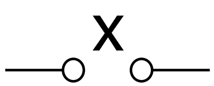
$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

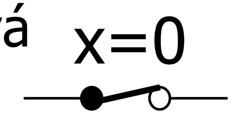
- Význam
  - Lze eliminovat přebytečné proměnné vyskytující se jak v přímé, tak komplementární formě ve výrazu
  - Uplatňuje se v řadě tzv. minimalizačních technik (např. Karnaughova mapa, metoda Quine-McCluskey atd.) vypracovaných pro systematické zjednodušování logických výrazů

Switching algebra [C. E. Shannon, 1938]

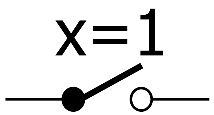
- Ukazuje analogii mezi reprezentací 0 a 1 ve dvouhodnotové Booleově algebře a uzavřenými resp. otevřenými obvody (sepnutými resp. rozepnutými kontakty relé) – diplomová práce 1936, publikováno 1938
- Definice
  - Proměnná „x" reprezentuje spínač



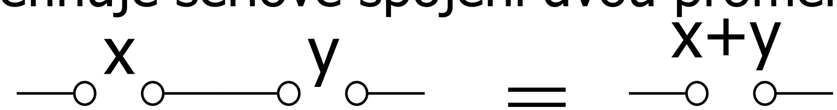
  - Hodnota „0" reprezentuje sepnutý kontakt (teoreticky nulová impedance,): x=0



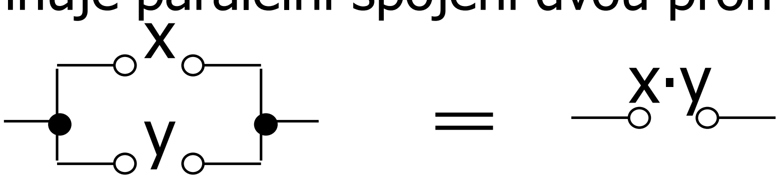
  - Hodnota „1" reprezentuje rozepnutý kontakt (teoreticky nekonečně velká impedance): x=1



  - x=y: pokud je x=0, tak y=0 a pokud je x=1, tak y=1
  - Operace OR definuje sériové spojení dvou proměnných



  - Operace AND definuje paralelní spojení dvou proměnných



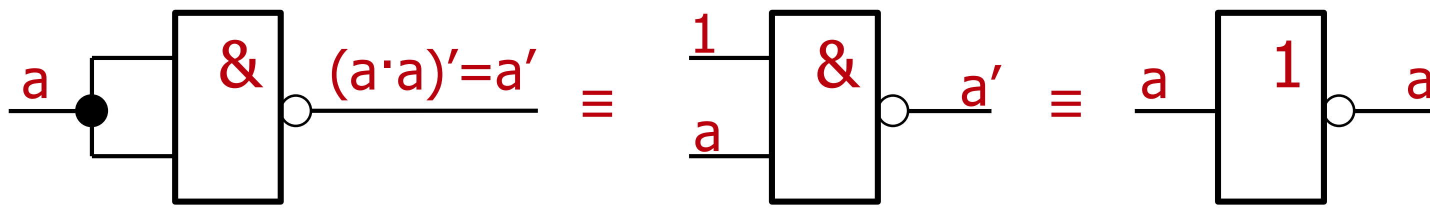
Switching algebra: Axiomy

- (1 a) $0 \cdot 0 = 0$
  - Uzavřený obvod (kontakt) paralelně s uzavřeným obvodem je uzavřený obvod
- (2 a) $1 + 0 = 0 + 1 = 1$
  - Otevřený obvod v libovolném pořadí v sérii s uzavřeným obvodem je otevřený obvod
- (3 a) $0 + 0 = 0$
  - Uzavřený obvod v sérii s uzavřeným obvodem je uzavřený obvod
- (4)
  - V každém okamžiku je buď x=0, nebo x=1
- (1 b) $1 + 1 = 1$
  - Otevřený obvod (kontakt) v sérii s otevřeným obvodem je otevřený obvod
- (2 b) $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$
  - Uzavřený obvod v libovolném pořadí paralelně s otevřeným obvodem je uzavřený obvod
- (3 b) $1 \cdot 1 = 1$
  - Otevřený obvod paralelně s otevřeným obvodem je otevřený obvod

- Na základě axiomů lze ukázat, že platí následující teorémy (důkaz např. úplnou indukcí):
  - (1 a) $x+y=y+x$ (1 b) $x \cdot y=y \cdot x$
  - (2 a) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (2 b) $x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$
  - (3 a) $x \cdot (y+z)=x \cdot y+x \cdot z$ (3 b) $x+y \cdot z=(x+y) \cdot (x+z)$
  - (4 a) $1 \cdot x=x$ (4b) $0+x=x$
  - (5 a) $1+x=1$ (5 b) $0 \cdot x=0$
  - (6 a) $x+x'=1$ (6 b) $x \cdot x'=0$
  - (7 a) $0'=1$ (7 b) $1'=0$
  - (8) $(x')'=x$
- De Morganův teorém (zobecněný pro více proměnných)
  - $(x+y+z+\ldots)'=x' \cdot y' \cdot z' \cdot \ldots$ $(x \cdot y \cdot z \cdot \ldots)'=x'+y'+z'+\ldots$
- Shannonův teorém – viz dále

- Využívá pouze log. funkci NAND – (a·b)′, $a \uparrow b$, $\overline{a \cdot b}$
  - Lze ukázat, že pomocí funkce NAND lze realizovat základní log. členy a tedy i veškeré logické funkce
- Platí zákon komutativní $(a \cdot b)' = (b \cdot a)'$
- Neplatí zákona asociativní $((a \cdot b)' \cdot c)' \neq (a \cdot (b \cdot c)')'$

$$(a \cdot a)' = a'$$

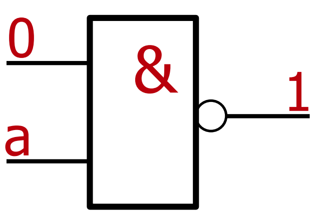


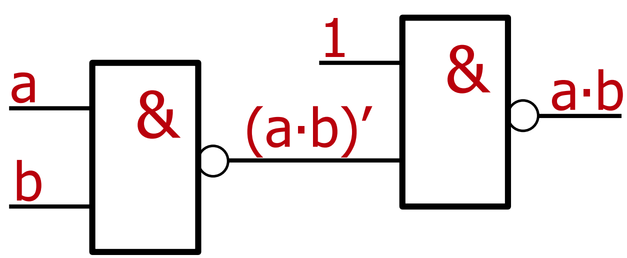
$$(a \cdot 0)' = 1$$

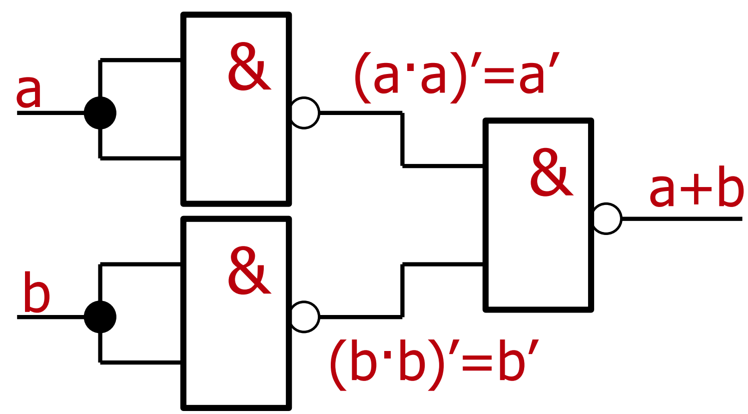
$$(a \cdot 1)' = a'$$

$$(a \cdot b)' \cdot 1 = ((a \cdot b)')' = a \cdot b$$

$$((a \cdot a)' \cdot (b \cdot b)')' = (a' \cdot b')' = a + b$$



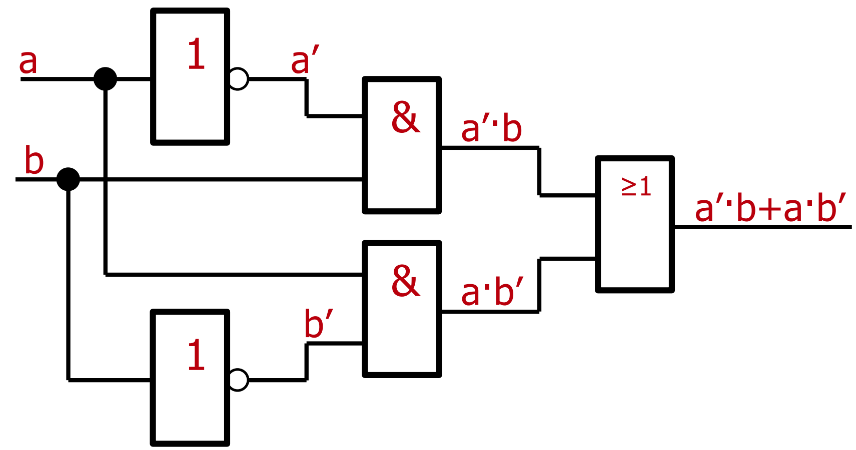




- Využití teorémů:
  - Involuce (dvojí negace)
  - de Morganovy zákony
- Pro implementaci výrazu stačí pouze členy NAND
- Příklad

$$\bar{\bar{a}} = a$$

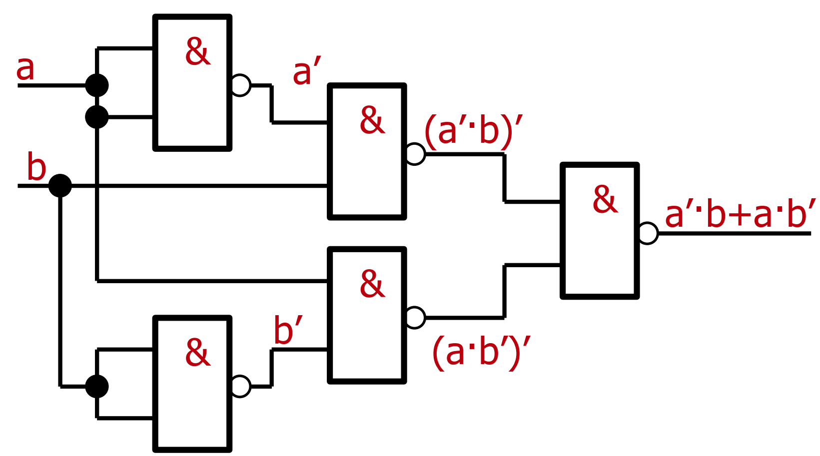
$$\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$



$$\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$$

$$= \overline{\overline{\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}}}$$

$$= \overline{\overline{\bar{a} \cdot b} \cdot \overline{a \cdot \bar{b}}}$$

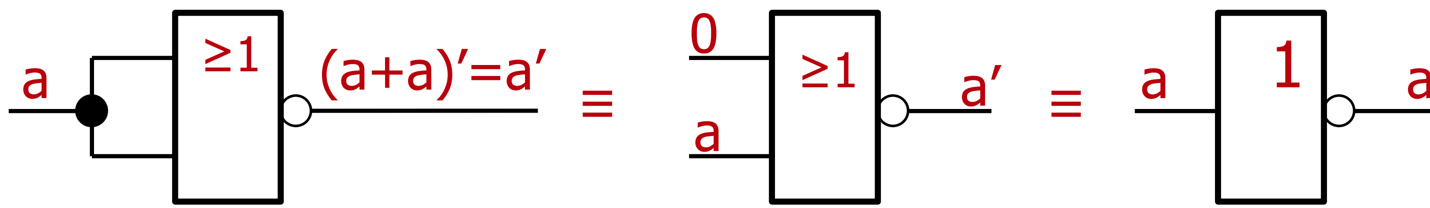


- Využívá pouze log. funkci NOR – (a+b)′, $a \downarrow b$
  - Lze ukázat, že pomocí funkce NOR lze realizovat základní log. členy a tedy i veškeré logické funkce
- Platí zákon komutativní $(a+b)' = (b+a)'$
- Neplatí zákona asociativní $((a+b)'+c)' \neq (a+(b+c)')'$

$$(a+a)' = a'$$

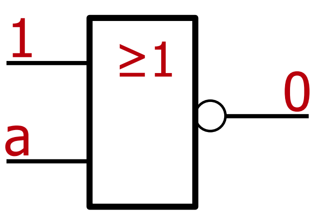
$$(a+0)' = a'$$

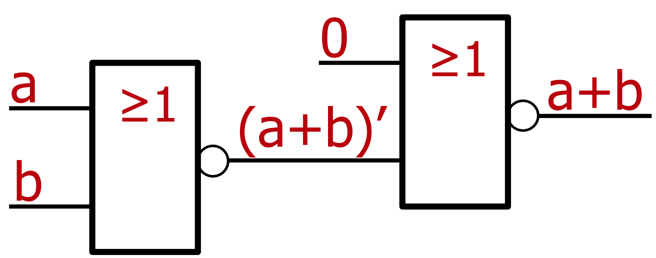
$$(a+1)' = 0$$

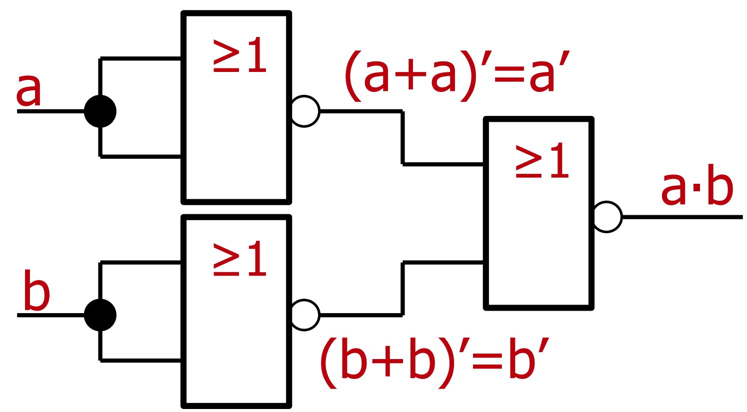


$$(a+b)'+0 = ((a+b)')' = a+b$$

$$((a+a)'+(b+b)')' = (a'+b')' = a \cdot b$$







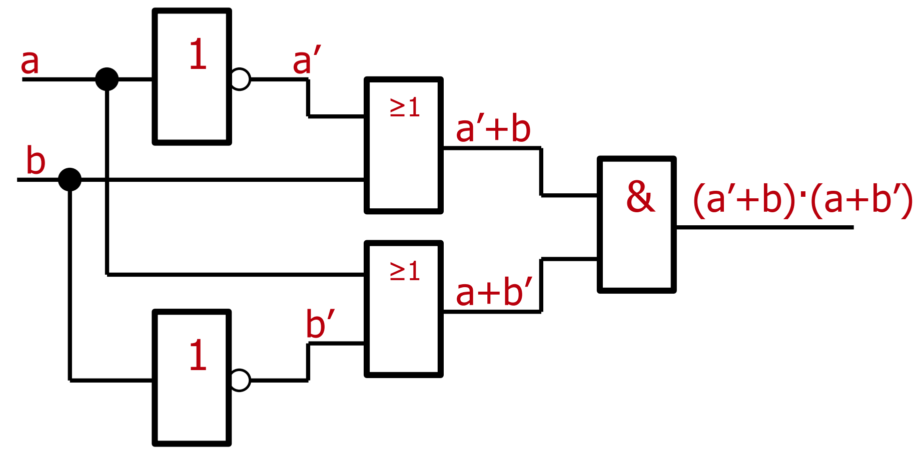
Převod Booleovy algebry na Piercovu algebru

- Využití teorémů:
  - Involuce (dvojí negace)
  - de Morganovy zákony

$$\overline{\overline{a}} = a$$

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

- Pro implementaci výrazu stačí pouze člen NOR

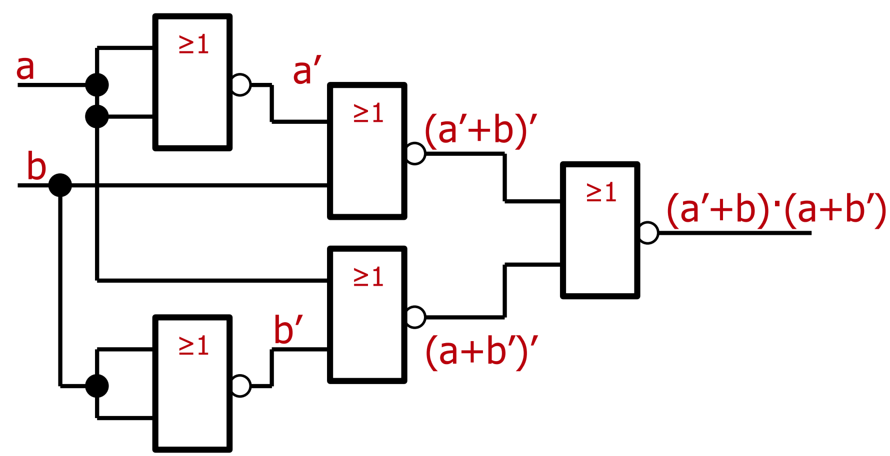


- Příklad

$$(\overline{a} + b) \cdot (a + \overline{b})$$

$$= \overline{\overline{(\overline{a} + b) \cdot (a + \overline{b})}}$$

$$= \overline{\overline{\overline{a} + b} + \overline{a + \overline{b}}}$$



Žegalkinova algebra

- Pro realizaci libovolné log. funkce využívá pouze log. členů XOR a AND
- Platí

$$a \oplus b = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$$

$$a \oplus \overline{a} = 1$$

$$a \oplus 1 = \overline{a}$$

$$a \oplus b \oplus (a \cdot b) = a + b$$

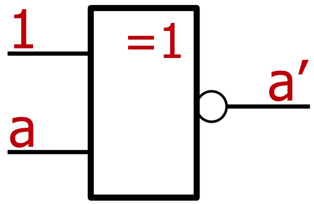
$$a \oplus (\overline{a} \cdot b) \oplus 1 = b \oplus (a \cdot \overline{b}) \oplus 1 = \overline{a + b}$$

$$1 \oplus b \oplus (a \cdot b) = a + \overline{b}$$

$$a \cdot (1 \oplus b) = a \cdot \overline{b}$$

$$a \oplus b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

Příklady



$$\overline{a} \cdot b + \overline{a} \cdot d$$

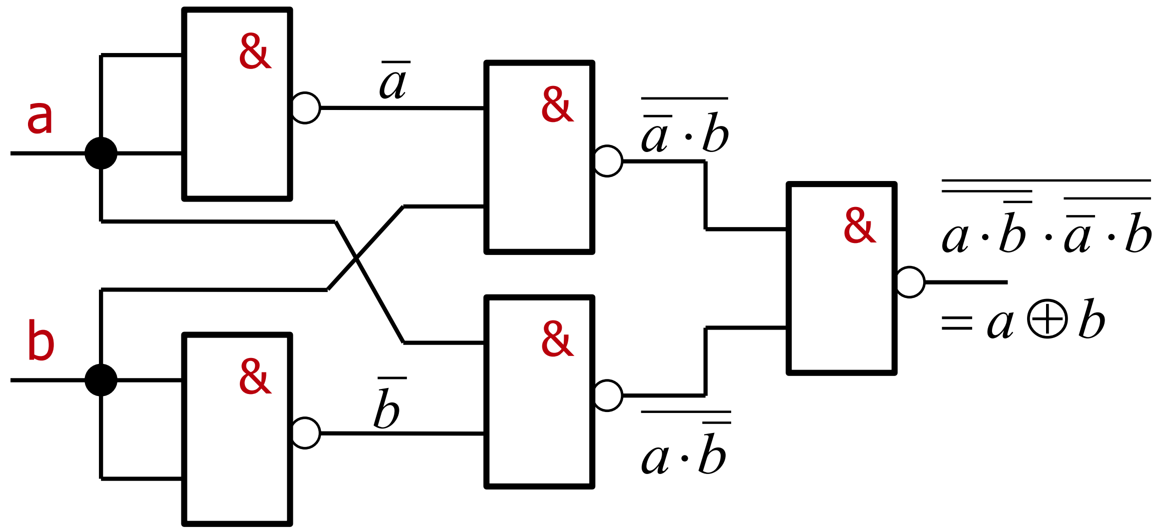
$$= \overline{a} \cdot (b + d)$$

$$= (a \oplus 1) \cdot (b \oplus d \oplus (b \cdot d))$$

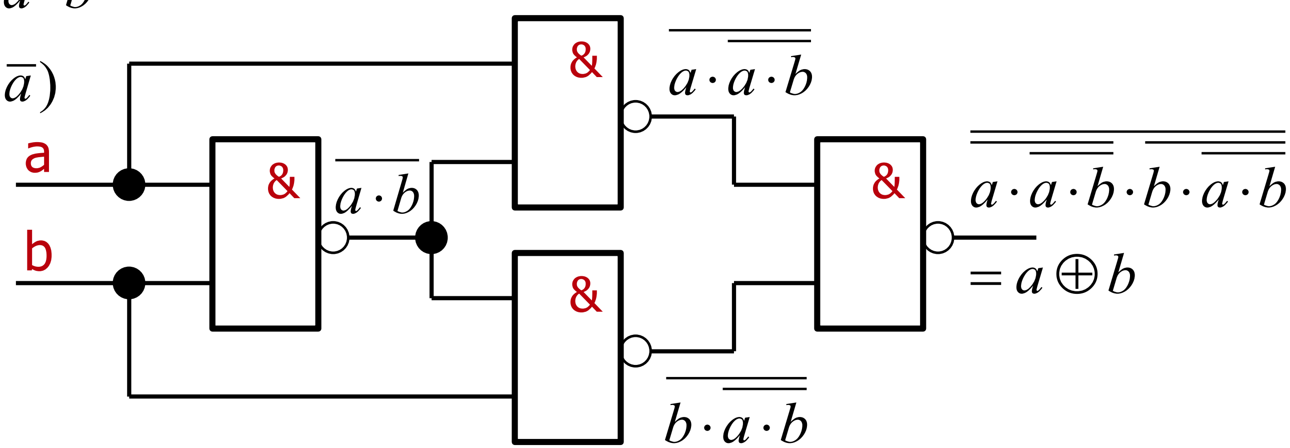
Příklad: Implementace XOR pomocí NAND

- Příklad

$$a \oplus b$$
$$= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$
$$= \overline{\overline{a \cdot \bar{b}} \cdot \overline{\bar{a} \cdot b}}$$



$$a \oplus b$$
$$= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$
$$= 0 + a \cdot \bar{b} + 0 + \bar{a} \cdot b$$
$$= a \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$
$$= a \cdot (\bar{a} + \bar{b}) + b \cdot (\bar{b} + \bar{a})$$
$$= a \cdot \overline{a \cdot b} + b \cdot \overline{a \cdot b}$$
$$= \overline{\overline{a \cdot \overline{a \cdot b} + b \cdot \overline{a \cdot b}}}$$
$$= \overline{\overline{a \cdot \overline{a \cdot b}} \cdot \overline{b \cdot \overline{a \cdot b}}}$$



Rozklady logických funkcí

- Shannonův teorém podle vybrané proměnné
  - ÚNDF

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\bar{x}_k \cdot f(x_1, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)] + [x_k \cdot f(x_1, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n)]$$

  - ÚNKF

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\bar{x}_k + f(x_1, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n] \cdot [x_k + f(x_1, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)]$$

- Např. podle proměnné x_1
  - ÚNDF $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \dots, x_n)] + [x_1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n)]$
  - ÚNKF $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\overline{x_1} + f(1, x_2, \dots, x_n)] \cdot [x_1 + f(0, x_2, \dots, x_n)]$
- Platí dualita funkcí

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 1, +, \cdot) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1, 0, \cdot, +)$$

- Důsledek
  - Každou log. funkci libovolného počtu proměnných lze realizovat pomocí základních log. operací AND, OR a NOT dvou proměnných - superpozice logických funkcí

- Shannonův teorém - příklad
  - Rozklad funkce dle proměnné x_1

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$$
$$= x_1 \cdot (x_2 \cdot \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \cdot (x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3)$$

$$f(x_1 = 1) = x_2 \cdot \bar{x}_3$$
$$f(x_1 = 0) = x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3$$

  - Rozklad funkce dle proměnné x_2

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$$
$$= x_2 \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_1 \cdot x_3)$$

$$f(x_2 = 1) = x_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1$$
$$f(x_2 = 0) = \bar{x}_1 \cdot x_3$$

  - Rozklad funkce dle proměnné x_3

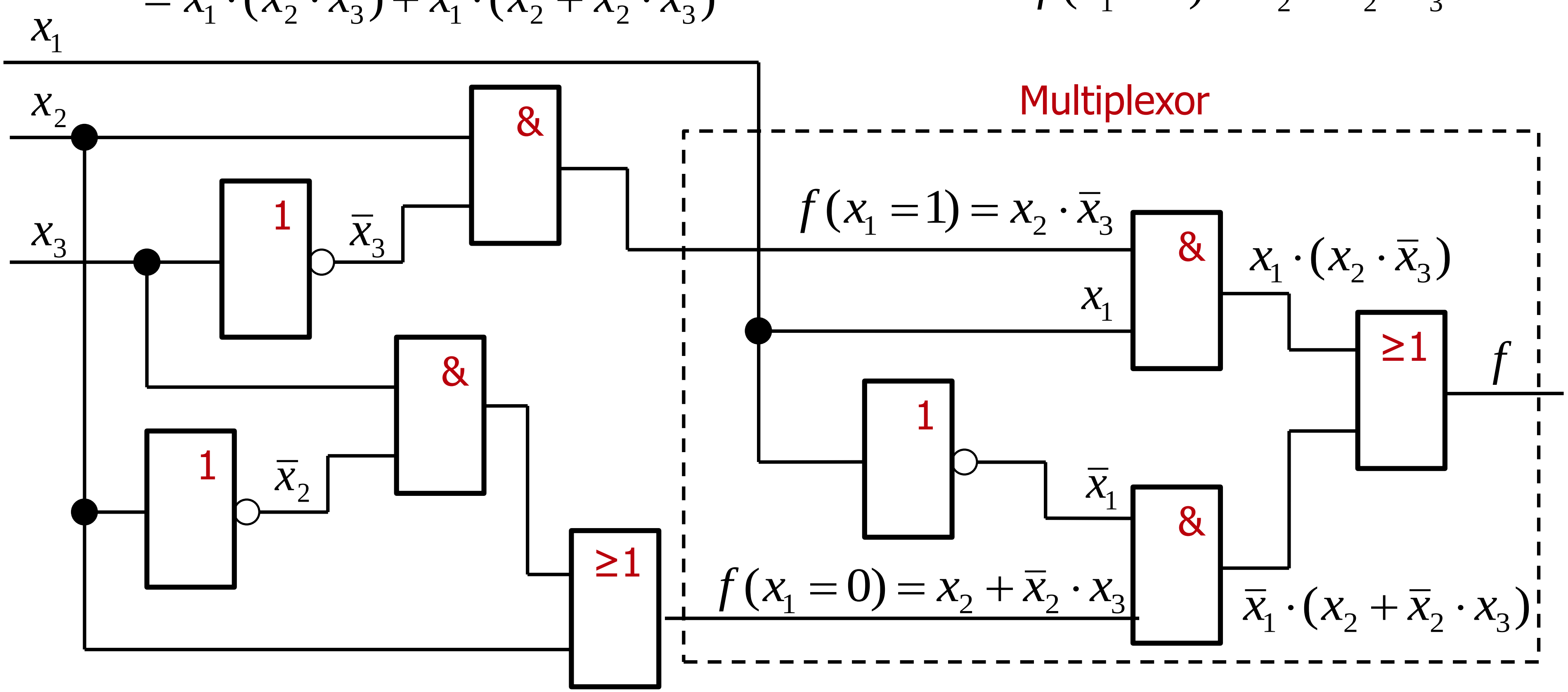
$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$$
$$= x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$$
$$= x_3 \cdot (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2) + \bar{x}_3 \cdot (x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2)$$

$$f(x_3 = 1) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2$$
$$f(x_3 = 0) = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2$$

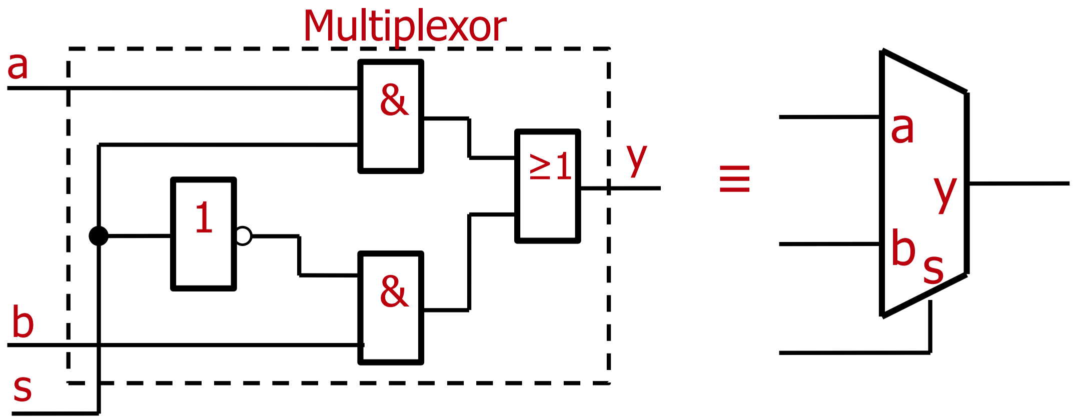
- Shannonův teorém - příklad
  - Rozklad funkce dle proměnné x_1

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$$
$$= x_1 \cdot (x_2 \cdot \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \cdot (x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3)$$

$$f(x_1 = 1) = x_2 \cdot \bar{x}_3$$
$$f(x_1 = 0) = x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3$$



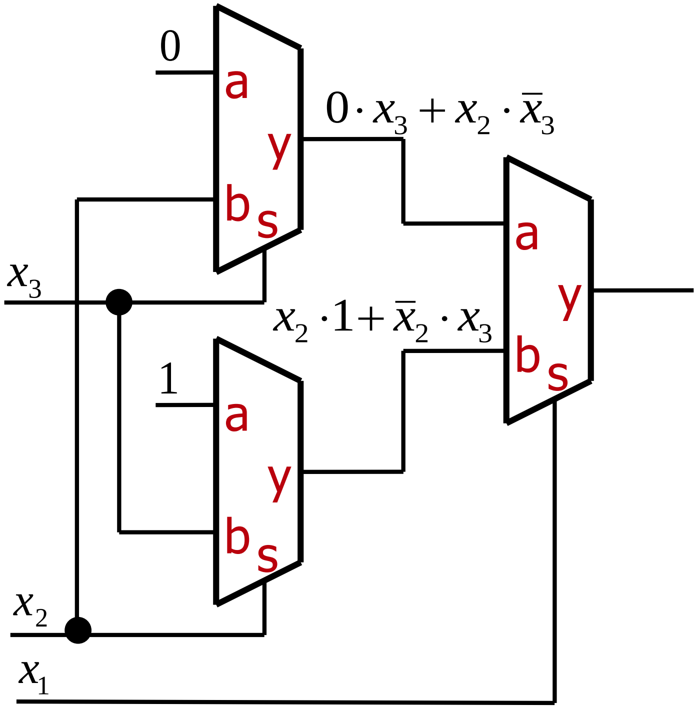
- Shannonův teorém - rozklad podle více proměnných
- Důsledek
  - Každá log. funkce může být implementována pouze pomocí multiplexorů (podrobněji budou probírány později)
  - Poznámka: zvyšuje se zpoždění obvodu
- Příklad



$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$$

$$= x_1 \cdot (x_2 \cdot \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \cdot (x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3)$$

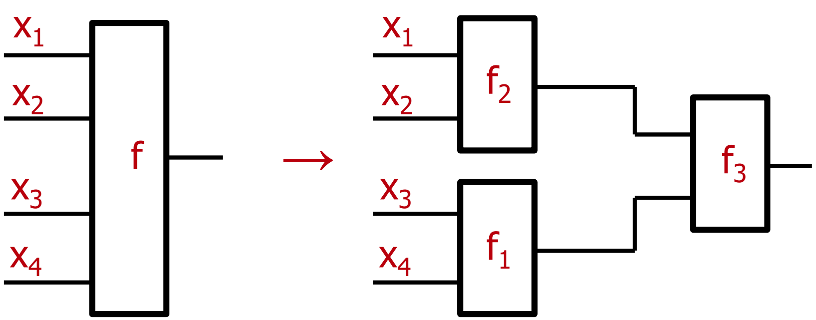
$$= x_1 \cdot (0 \cdot x_3 + x_2 \cdot \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \cdot (x_2 \cdot 1 + \bar{x}_2 \cdot x_3)$$



Rozklady logických funkcí

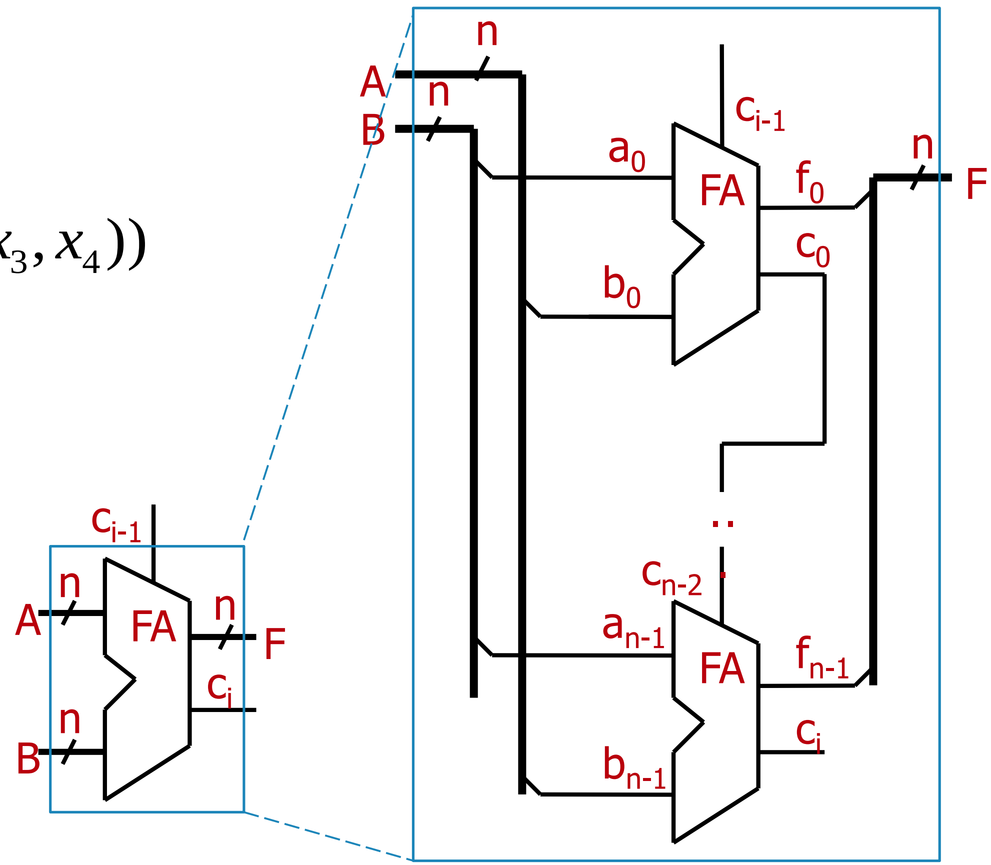
- Disjunktní rozklad
  - Množiny vstupních proměnných jsou vzájemně disjunktní
- Na podfunkce
  - Např.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = f_3(f_2(x_1,x_2), f_1(x_3,x_4))$$

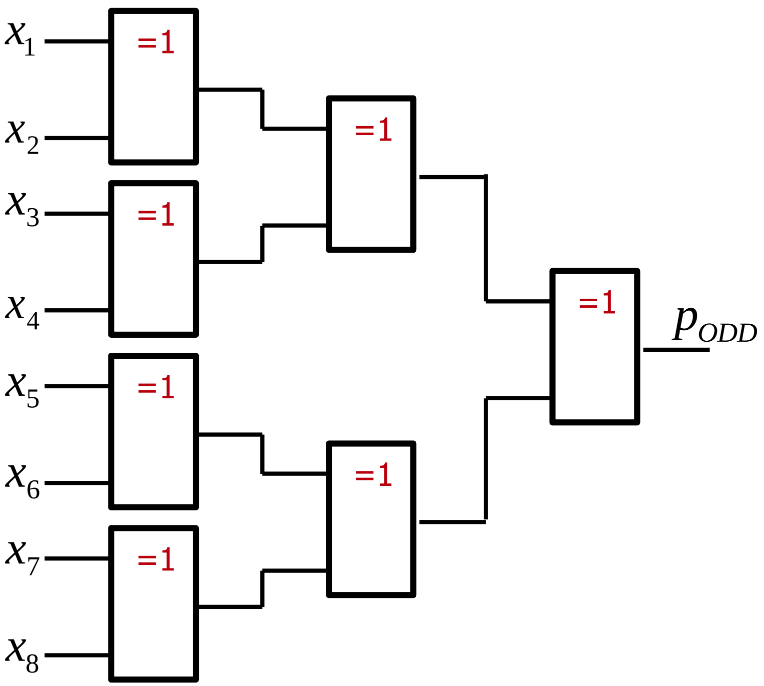


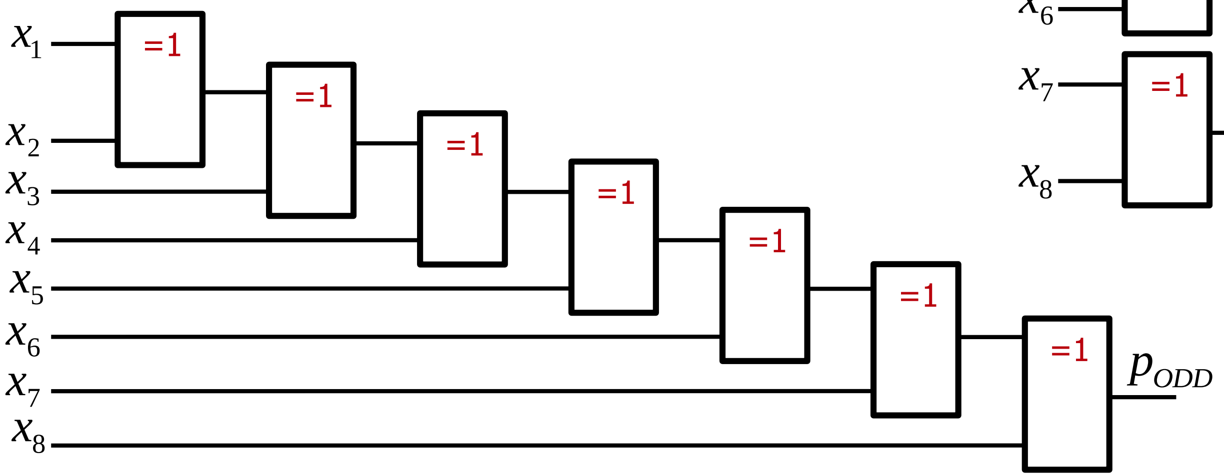
- Iterační
  - Typicky vícebitové operace na jednobitové
  - Např.: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = f_4(f_3(f_2(f_1(x_1),x_2)),x_3),x_4)$

- Vícenásobný disjunktní rozklad
  - Např. n-bitová sčítačka



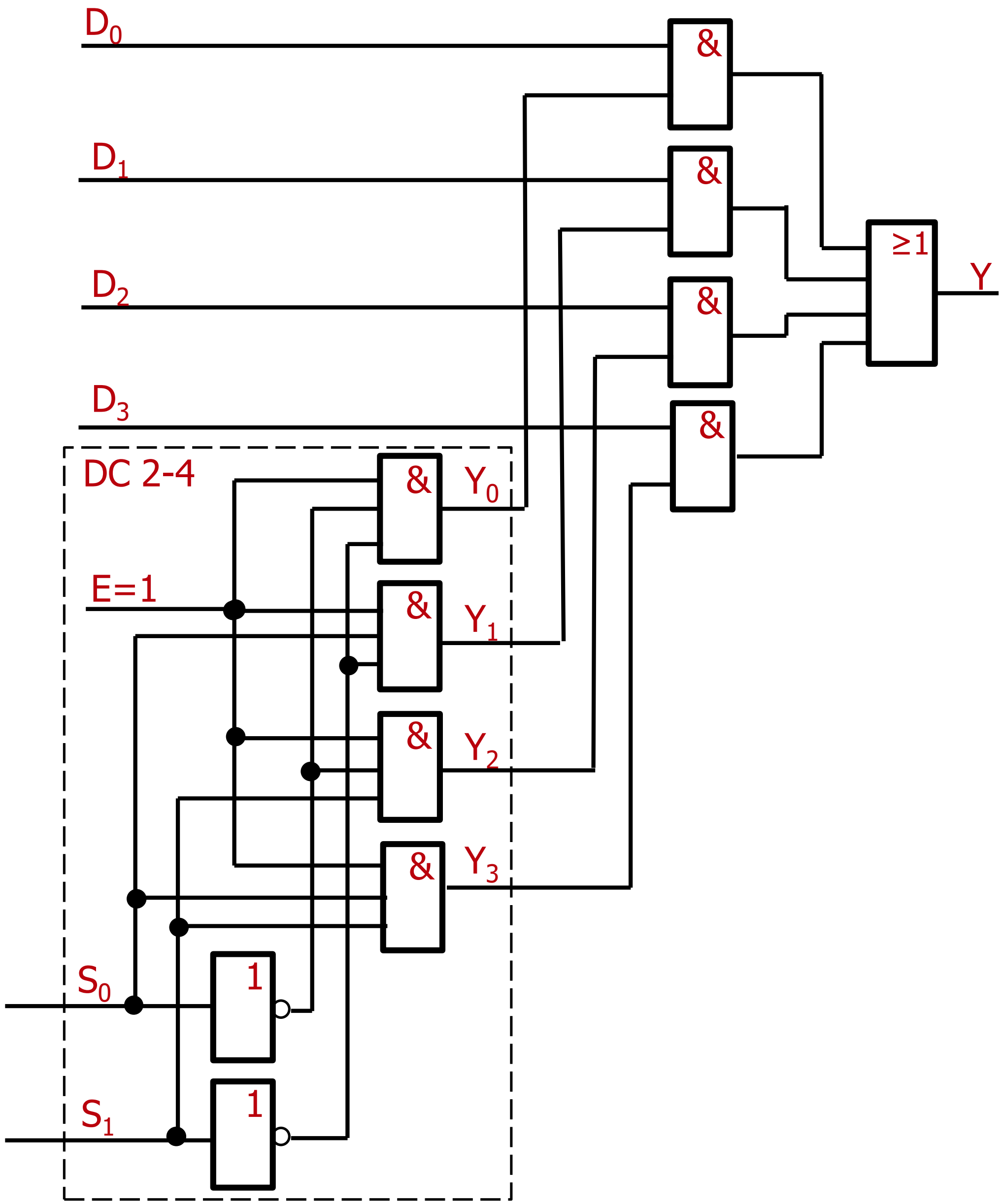
- Příklad generování liché parity
  - Disjunktní rozklad na podfunkce - stromová struktura
  - Disjunktní iterační rozklad - kaskádní struktura





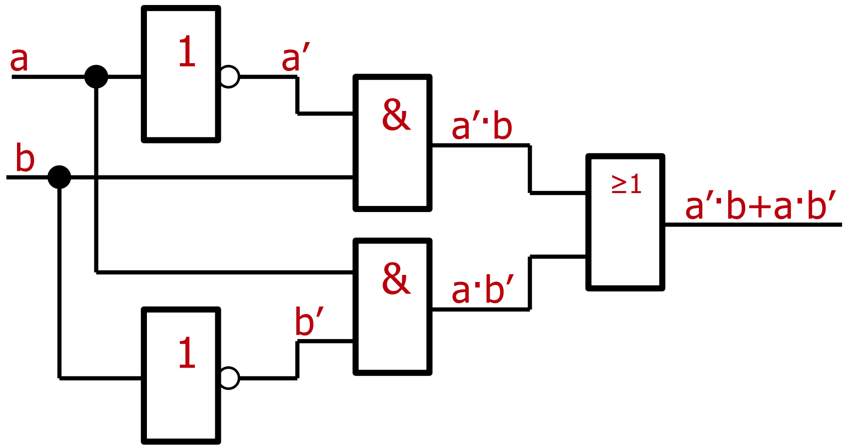
$$p_{ODD}(x_1,\dots,x_8) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_8$$

- Funkční
  - Nejčastěji se provádí intuitivně na základě znalosti chování, které má daná funkce mít
  - Např. multiplexor lze sestavit pomocí dekodéru 2-4 (1 ze 4) s povolovacím (datovým) vstupem E (podrobnosti budou uvedeny později)

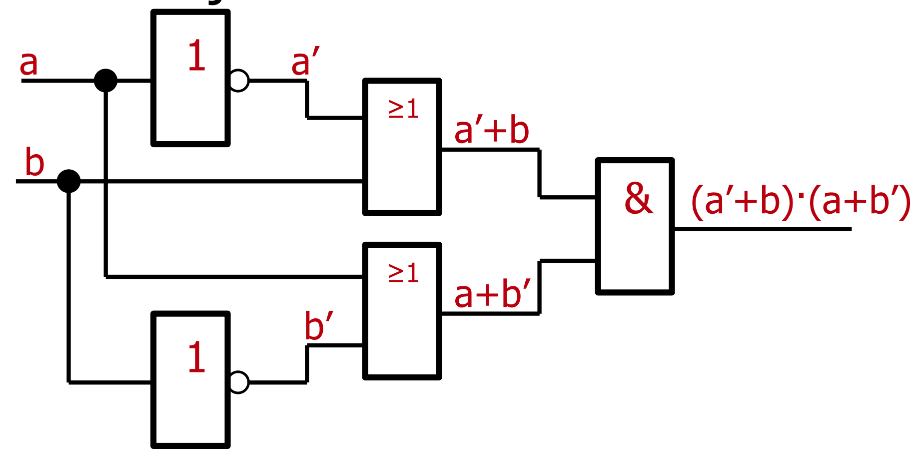


Úrovně logických obvodů (délky logických větví)

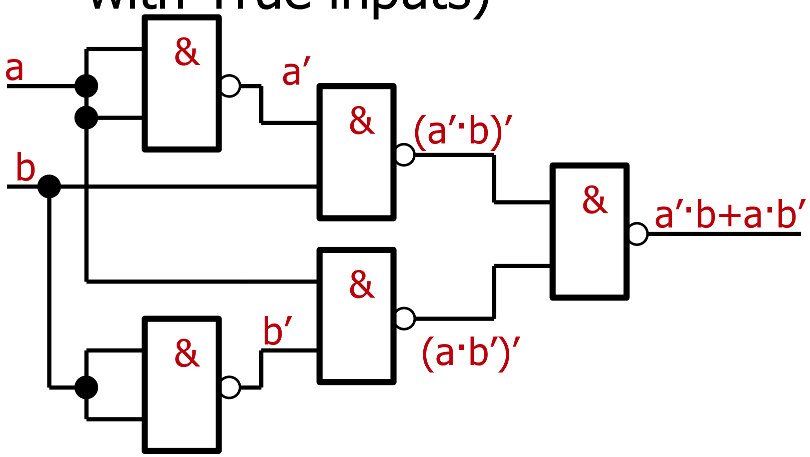
- Realizace normálních forem má tři úrovně
  - Disjunktní



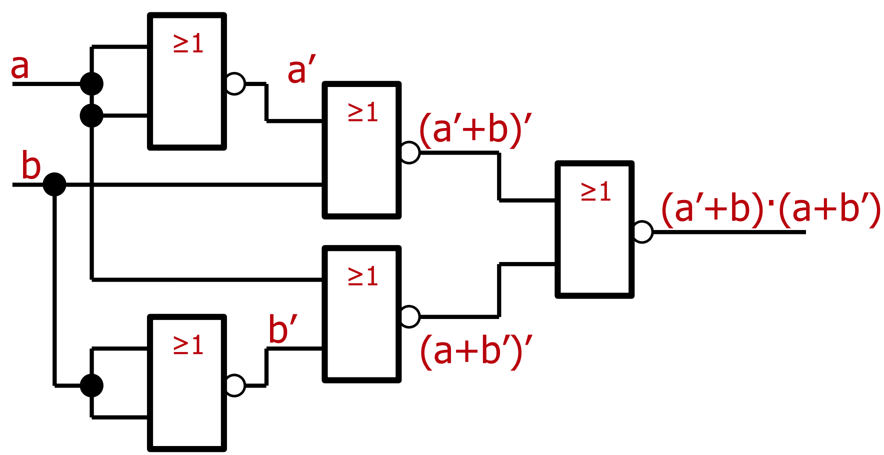
  - Konjunktní



- TANT (Three-level And-Not logic with True inputs)

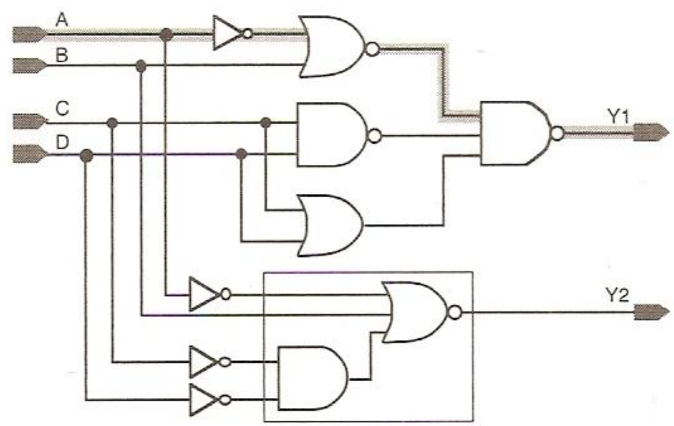


- TONT (Three-level Or-Not logic with True inputs)

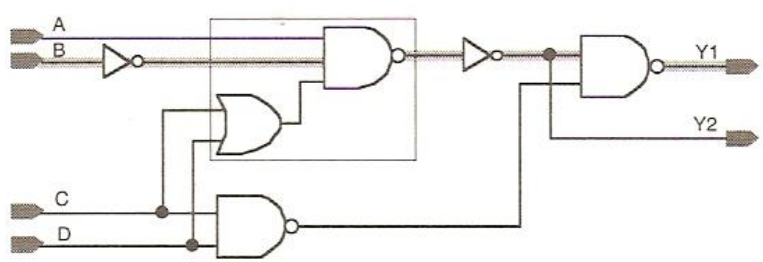


- Hledání společných termů s cílem zjednodušení implementace log. funkce
  - Typicky u funkcí s více výstupy
  - Důsledkem může být větší zpoždění obvodu
  - Využívá distributivní zákon
- Příklad

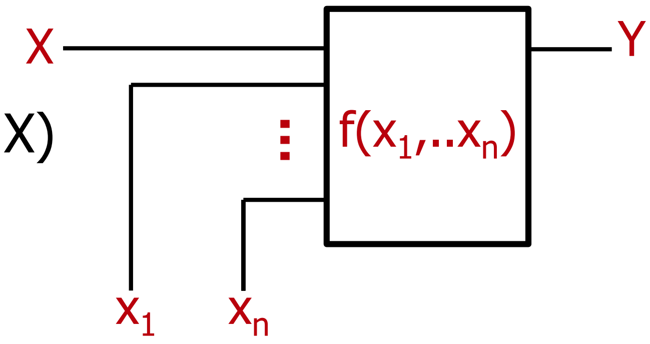
A	B	C	D	Y1	Y2
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0



Počet log. členů: 10
Zpoždění: 3 td

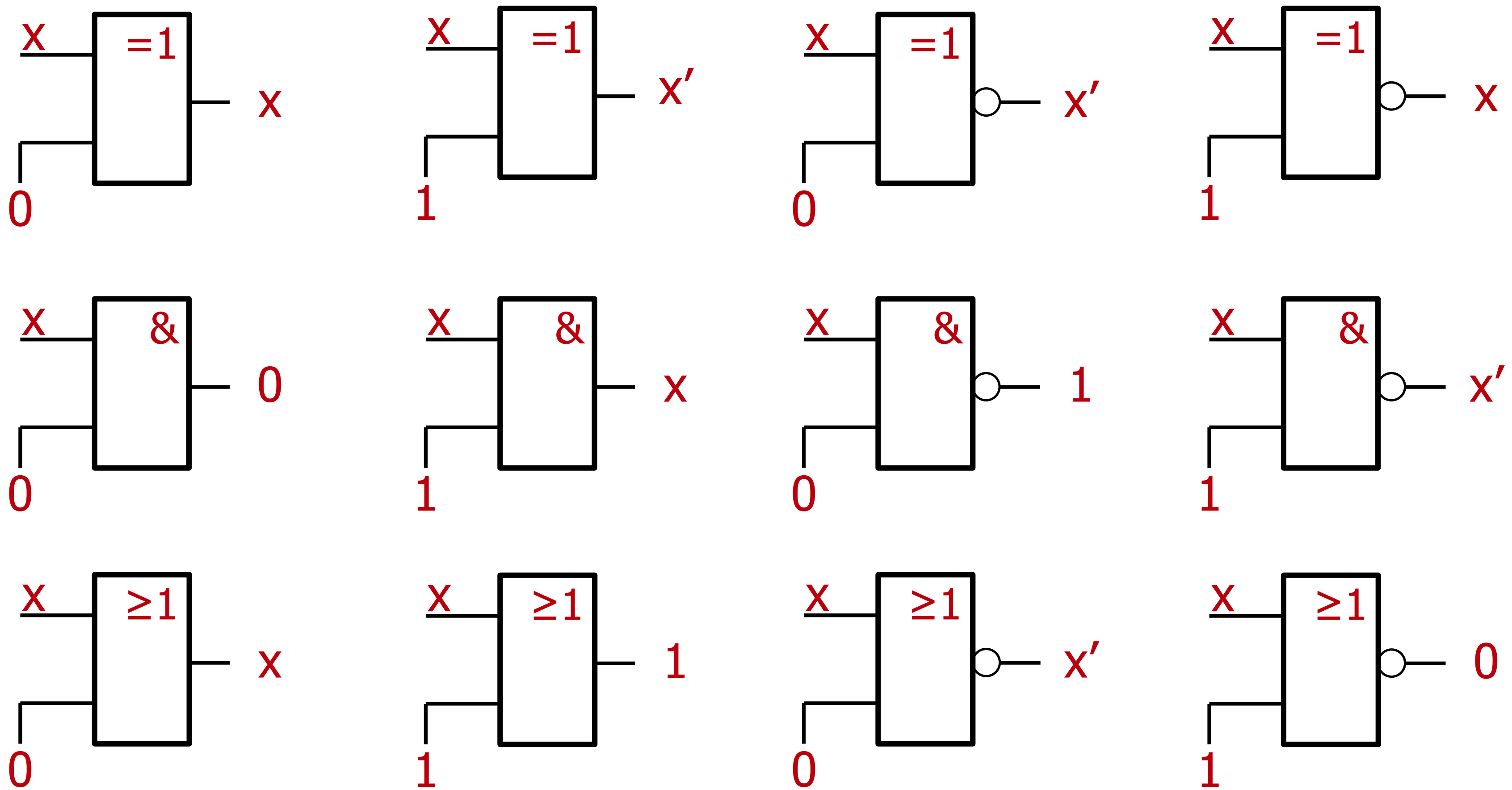


Počet log. členů: 5
Zpoždění: 4 td



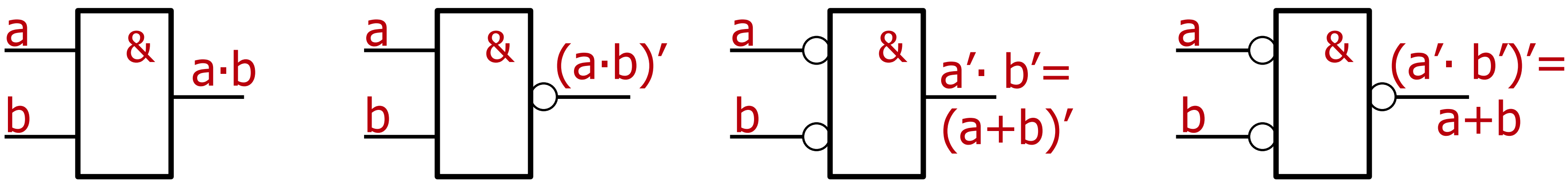
- Hradlo - logický člen, který má
    - Vstupní proměnné (typicky jedna, např. X)
    - Řídicí proměnné, např. vstupy $x_1,\dots x_n$
    - Výstupní proměnná, např. Y
- Platí buď
    - Hradlo je průchodné $f(x_1,\dots,x_n)=1 \Rightarrow Y = X$
    - Hradlo je neprůchodné $f(x_1,\dots,x_n)=0 \Rightarrow Y = 0$
- Nebo (tzv. negující hradlo)
    - Hradlo je průchodné $f(x_1,\dots,x_n)=1 \Rightarrow Y = \overline{X}$
    - Hradlo je neprůchodné $f(x_1,\dots,x_n)=0 \Rightarrow Y = 1$

- Elementární hradla - mají jen jednu proměnnou
  - Např. log. člen XOR resp. XNOR lze použít jako tzv. řízený invertor – pokud je řídicí vstup 1 resp. 0, pak se hodnota vstupní proměnné na výstupu neguje (generuje její jedničkový doplněk), jinak se nemění

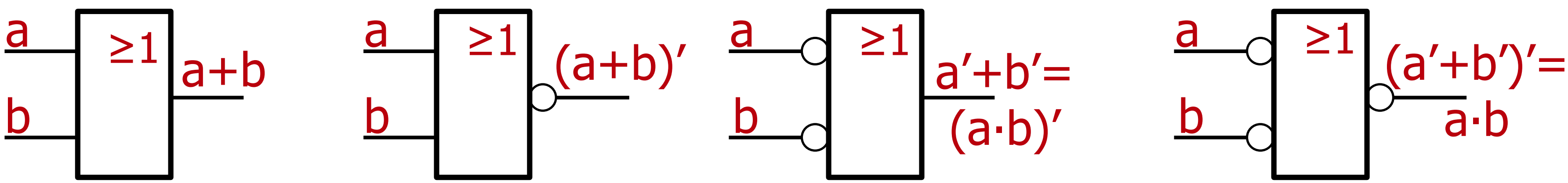


- S využitím DeMorganových zákonů

AND NAND NOR OR

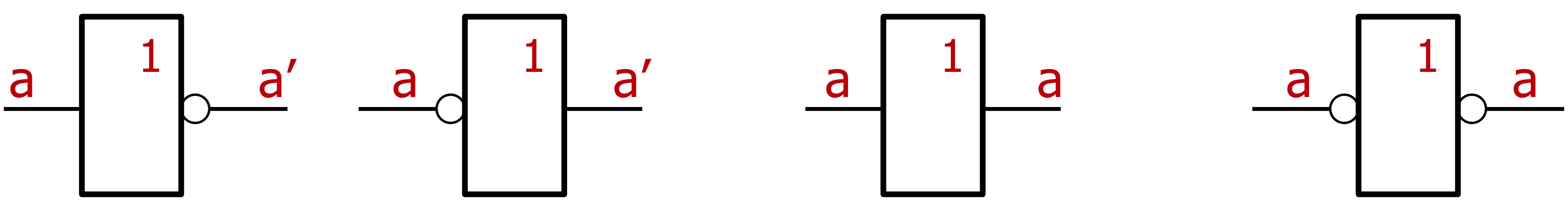


OR NOR NAND AND



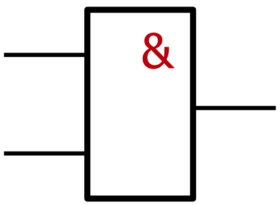
Invertor

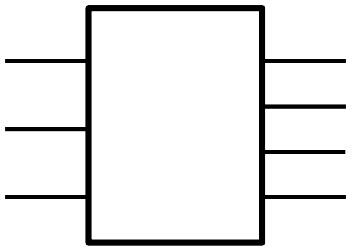
Sledovač (buffer, transfer log. hodnot)



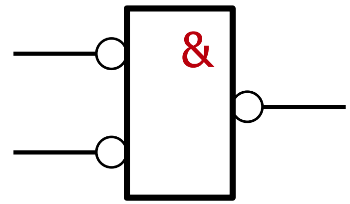
Aktivní logické úrovně

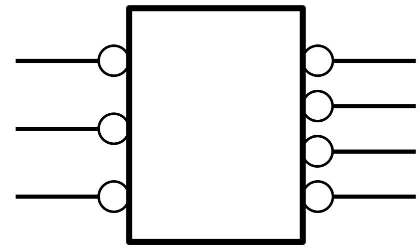
- Signály jsou aktivní v log. 1





- Signály jsou aktivní v log. 0



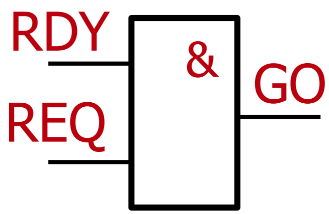


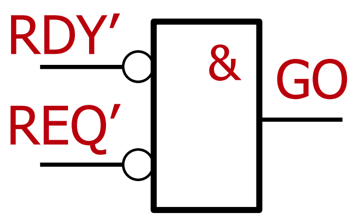
Signál aktivní v log. 0	Signál aktivní v log. 1
READY-	READY+
READY.L	READY.H
READY(L)	READY(H)
READY*	READY
READY’	READY
~READY	READY
/READY	READY
READY_L	READY_H
$\overline{\text{READY}}$	READY

- Aktivita signálů se volí dle potřeby
  - Lepší čitelnost schématu
  - Technologické důvody apod.
  - V praxi se používají různé způsoby značení aktivních log. úrovní, viz tabulka

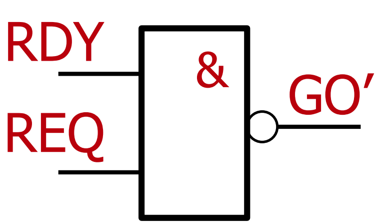
Aktivní logické úrovně: Příklad

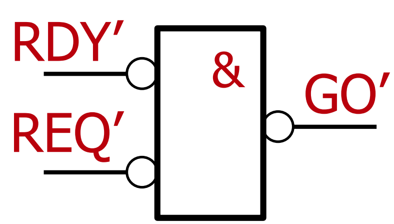
- Funkce GO je aktivní v log.1
  - Vstupy RDY a REQ jsou aktivní v log.1, resp. log.0



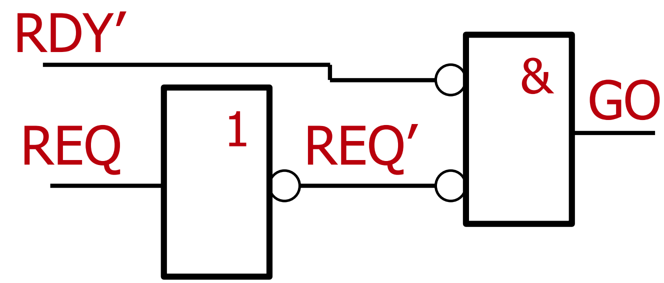


- Funkce GO’ je aktivní v log.0
  - Vstupy RDY a REQ jsou aktivní v log.1, resp. log.0

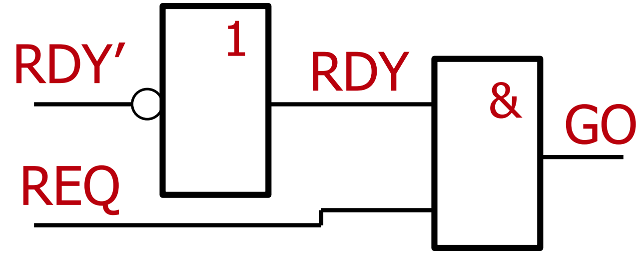




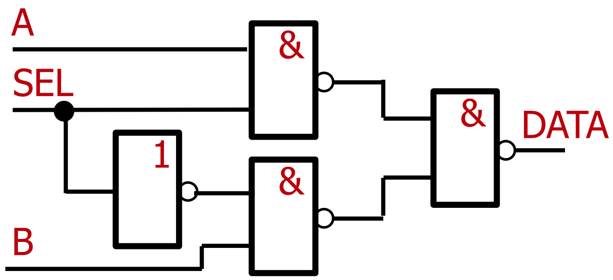
- Funkce GO je aktivní v log.1
  - Vstup RDY’ je aktivní v log.0
  - Vstup REQ je aktivní v log.1
    - Realizace pomocí členu AND a invertoru



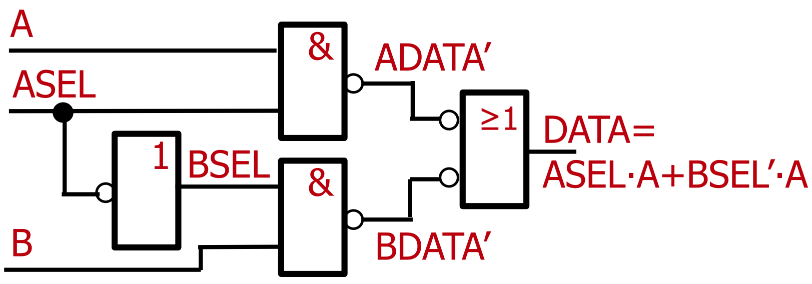
    - Realizace pomocí členu NOR a invertoru



- Schémata log. obvodů je vhodné kreslit s ohledem na snazší pochopení (analýzu) jejich funkce
- Hůře analyzovatelný obvod
  - Realizován (z praktických důvodů) pomocí hradel NAND a invertoru



- Lépe analyzovatelný obvod
  - Je též realizován pomocí hradel NAND a invertoru
  - Signály mezi hradly (výstup - vstup) jsou kresleny buď v negované, nebo přímé podobě (použití DeMorganových záklonů)
  - V každém uzlu obvodu vidíme, jakých log. úrovní bude signál nabývat při aktivním výstupu



Prahová logická funkce

- Definice
  - n…počet logických proměnných x_0, …, x_n
  - Každé logické proměnné je přiřazena váha w_i, která určuje významnost dané proměnné x_i (její vliv na výstup)
  - Prahová funkce nabývá hodnoty 1, pokud součet hodnot vah těch proměnných, jejichž hodnota je 1, je větší nebo roven hodnotě prahu T

$$f_N^T = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (w_i \cdot x_i) \geq T$$

  - Řád prahové funkce je dán součtem hodnot všech vah

$$N = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

Prahová logická funkce

- Příklad 1
  - $w_a=3$, $w_b=2$, $w_c=1$
  - N=3+2+1=6
  - T=4

$$f_6^4(3a,2b,c) = a\cdot\overline{b}\cdot c + a\cdot b\cdot\overline{c} + a\cdot b\cdot c$$

a	b	c	$\Sigma(w_i \cdot x_i)$	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 4$
0	0	0	3·0+2·0+1·0=0	0
0	0	1	3·0+2·0+1·1=1	0
0	1	0	3·0+2·1+1·0=2	0
0	1	1	3·0+2·1+1·1=3	0
1	0	0	3·1+2·0+1·0=3	0
1	0	1	3·1+2·0+1·1=4	1
1	1	0	3·1+2·1+1·0=5	1
1	1	1	3·1+2·1+1·1=6	1

- Příklad 2
  - $w_a=-1$, $w_b=2$, $w_c=1$
  - N=-1+2+1=2
  - T=2

$$f_2^2(-a,2b,c) = \overline{a}\cdot b\cdot\overline{c} + \overline{a}\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot c$$

a	b	c	$\Sigma(w_i \cdot x_i)$	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 2$
0	0	0	-1·0+2·0+1·0=0	0
0	0	1	-1·0+2·0+1·1=1	0
0	1	0	-1·0+2·1+1·0=2	1
0	1	1	-1·0+2·1+1·1=3	1
1	0	0	-1·1+2·0+1·0=-1	0
1	0	1	-1·1+2·0+1·1=0	0
1	1	0	-1·1+2·1+1·0=1	0
1	1	1	-1·1+2·1+1·1=2	1

- Definice
  - n…počet logických proměnných $x_0, \ldots, x_n$
  - Všem logickým proměnným je přiřazena váha $w_i=1$
  - Prahová funkce nabývá hodnoty 1, pokud alespoň T vstupních proměnných je rovno 1

$$f_n^T = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq T$$

  - Řád symetrické prahové funkce = počet proměnných n

- Příklad
  - $w_a=1$, $w_b=1$, $w_c=1$
  - N=1+1+1=3
  - T=2

a	b	c	Σx_i	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 2$
0	0	0	1·0+1·0+1·0=0	0
0	0	1	1·0+1·0+1·1=1	0
0	1	0	1·0+1·1+1·0=1	0
0	1	1	1·0+1·1+1·1=2	1
1	0	0	1·1+1·0+1·0=1	0
1	0	1	1·1+1·0+1·1=2	1
1	1	0	1·1+1·1+1·0=2	1
1	1	1	1·1+1·1+1·1=3	1

$$f_3^2(a,b,c) = \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c$$

$$= a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b$$

Symetrická prahová logická funkce

- Transformace
  - Prahová funkce na logický součet

$$F_n^1(a_1,\dots,a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

  - Příklad

    $w_a=1$, $w_b=1$, $w_c=1$

    N=1+1+1=3

    T=1 $\quad f_3^1(a,b,c) = a + b + c$

  - Prahová funkce na logický součin

$$F_n^n(a_1,\dots,a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

  - Příklad

    $w_a=1$, $w_b=1$, $w_c=1$

    N=1+1+1=3

    T=3 $\quad f_3^3(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$

a	b	c	Σx_i	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 1$
0	0	0	1·0+1·0+1·0=0	0
0	0	1	1·0+1·0+1·1=1	1
0	1	0	1·0+1·1+1·0=1	1
0	1	1	1·0+1·1+1·1=2	1
1	0	0	1·1+1·0+1·0=1	1
1	0	1	1·1+1·0+1·1=2	1
1	1	0	1·1+1·1+1·0=2	1
1	1	1	1·1+1·1+1·1=3	1

a	b	c	Σx_i	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 3$
0	0	0	1·0+1·0+1·0=0	0
0	0	1	1·0+1·0+1·1=1	0
0	1	0	1·0+1·1+1·0=1	0
0	1	1	1·0+1·1+1·1=2	0
1	0	0	1·1+1·0+1·0=1	0
1	0	1	1·1+1·0+1·1=2	0
1	1	0	1·1+1·1+1·0=2	0
1	1	1	1·1+1·1+1·1=3	1

- Definice
  - $n \geq 3$…počet logických proměnných $x_0, \ldots, x_n$
  - Všem logickým proměnným je přiřazena váha $w_i=1$
  - Prahová funkce nabývá hodnoty 1, pokud alespoň nadpoloviční většina vstupních proměnných je rovna 1
  - = symetrická prahová funkce lichého řádu s prahem $T = \frac{n+1}{2}$

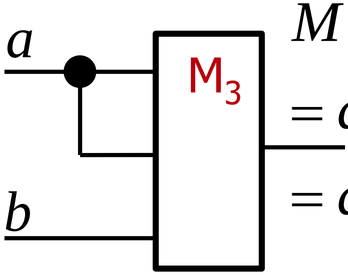
$$M_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{n+1}{2}$$

  - Řád majority - počet proměnných n
- Příklad
  - $w_a=1$, $w_b=1$, $w_c=1$
  - $N=1+1+1=3$
  - $T=2$

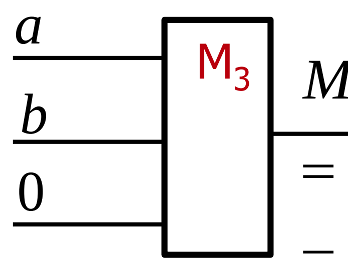
$$M_3(a,b,c)$$
$$= \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c$$
$$= a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$$

a	b	c	Σx_i	$M_3=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 2$
0	0	0	1·0+1·0+1·0=0	0
0	0	1	1·0+1·0+1·1=1	0
0	1	0	1·0+1·1+1·0=1	0
0	1	1	1·0+1·1+1·1=2	1
1	0	0	1·1+1·0+1·0=1	0
1	0	1	1·1+1·0+1·1=2	1
1	1	0	1·1+1·1+1·0=2	1
1	1	1	1·1+1·1+1·1=3	1

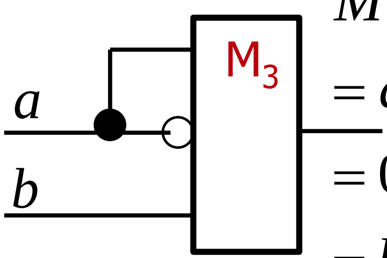
- Příklady



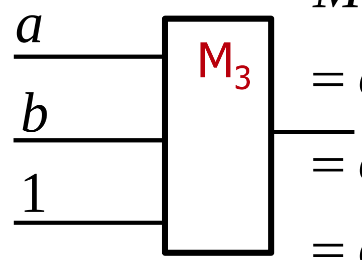
$$M_3(a,a,b) = a\cdot a + a\cdot b + a\cdot b = a + a\cdot b = a$$



$$M_3(a,b,0) = a\cdot b + a\cdot 0 + b\cdot 0 = a\cdot b$$



$$M_3(a,\overline{a},b) = a\cdot\overline{a} + a\cdot b + \overline{a}\cdot b = 0 + b\cdot(a+\overline{a}) = b\cdot 1 = b$$



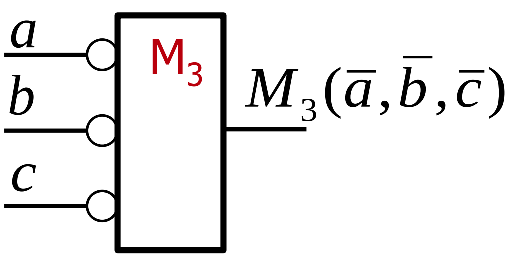
$$M_3(a,b,1) = a\cdot b + a\cdot 1 + b\cdot 1 = a\cdot b + a + b = a\cdot(b+1) + b = a + b$$

Majorita: Využití pro implementaci log. funkcí

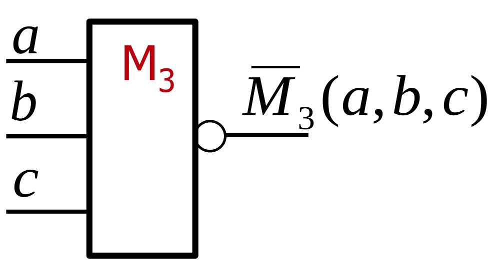
- Příklad

$$M_3(a,b,c) = \overline{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c$$

$$M_3(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot c + \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{M}_3(a,b,c)$$



=



$$\sum m(3,5,6,7) = \prod M(0,1,2,4)$$

a	b	c	Σx_i	$M_3=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 2$
0	0	0	1·0+1·0+1·0=0	0
0	0	1	1·0+1·0+1·1=1	0
0	1	0	1·0+1·1+1·0=1	0
0	1	1	1·0+1·1+1·1=2	1
1	0	0	1·1+1·0+1·0=1	0
1	0	1	1·1+1·0+1·1=2	1
1	1	0	1·1+1·1+1·0=2	1
1	1	1	1·1+1·1+1·1=3	1