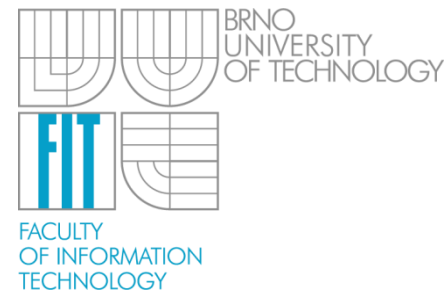


Návrh číslicových systémů (INC)

Otto Fučík

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta informačních technologií
Božetěchova 2, 612 66 Brno



Použitá literatura

- N. Frištacký, M. Kolesár, J. Kolenička a J. Hlavatý: „Logické systémy“, SNTL Praha, 1986
M. Eysselt: „Logické systémy“, SNTL Praha, skriptum VUT v Brně, 1985
J. F. Wakerly: „Digital Design. Principles and Practices“, Prentice Hall, ISBN 0-13-769191-2, 2000
V. P. Nelson, H.T.Nagle, B.D.Carroll, J.D.Irwin: „Digital Logic Circuit Analysis & Design“, ISBN 0-13-463894-8, 1995
T.L.Floyd: „Digital Fundamentals“, Prentice Hall, ISBN 0-13-080850-4, 2000

Logické obvody

1. Distributivní komplementární svaz

- Obsahuje alespoň dva prvky

2. Šestice $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$

- „ B ” neprázdná množina s alespoň dvěma různými prvky
- „ $+$ ” logický součet (binární operace)
- „ \cdot ” logický součin (binární operace)
- „ $'$ ” komplement (unární operace)
- „ 0 ” nejmenší (nulový) prvek (infimum)
- „ 1 ” největší (jedničkový) prvek (supremum)
- Definuje množinu prvků, množinu operátorů, axiomy (postuláty) a teorémy (věty)
- Dvuhodnotová Booleova algebra
 - Axiomy a teorémy Booleovy algebry (1854) jsou definovány obecně
 - My se omezíme na dvuhodnotovou Booleovu algebru, ve které logické proměnné a výsledky logických funkcí mohou nabývat pouze hodnot 0 a 1 ($0 \neq 1$)

- Základní
 - Logický součet (disjunkce, spojení, sjednocení, OR): $x \vee y, x + y$
 - Logický součin (konjunkce, průsek, průnik, AND): $x \wedge y, x \cdot y$
 - Negace (inverze, doplněk, komplement, NOT): $x', \bar{x}, \neg x, \sim x$
- Shefferova funkce (negace log. součinu, NAND): $x \uparrow y, \overline{x \cdot y}$
- Pierceova funkce (negace log. součtu, NOR): $\overline{x \downarrow y}, \overline{x + y}$
- Exkluzivní log. součet: $x \oplus y, x \equiv y, \overline{x \cdot y} + x \cdot \overline{y}$
 - Pro 2 proměnné též nonekvivalence (součet modulo 2)
- Ekvivalence (totožnost, rovnost, XNOR): $x \Leftrightarrow y, x \equiv y, \overline{\overline{x \cdot y} + x \cdot \overline{y}}$
- Implikace: $x \Rightarrow y, x \rightarrow y, \overline{x} + y$
- Inhibice (negace implikace) $\overline{x \Rightarrow y}, x \nrightarrow y, x \cdot \overline{y}$
- Kontradikce: výsledkem je konstanta 0 (nezávisle na vstupech)
- Tautologie: výsledek je konstanta 1 (nezávisle na vstupech)
- Logické operace jsou realizovány logickými členy

- Pokud platí nějaké tvrzení, tak platí i duální tvrzení, které vznikne vzájemnou záměnou operací „+“ a „·“ a prvků 0 a 1

$$0 \rightarrow 1 \quad 1 \rightarrow 0 \quad "+" \rightarrow "\cdot" \quad "\cdot" \rightarrow "+"$$

- Příklad:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Poznámka

- Pokud platí jisté tvrzení, není třeba dokazovat tvrzení duálního tvrzení

- Uzavřenost (výsledky log. operací patří do množiny B)

$$(a + b) \in B \quad (\text{I a}) \quad (a \cdot b) \in B \quad (\text{I b})$$

- Neutralita prvků 0 a 1 (identita)

$$a + 0 = a \quad (\text{II a}) \quad a \cdot 1 = a \quad (\text{II b})$$

- Zákony komutativní (komutativita)

$$a + b = b + a \quad (\text{III a}) \quad a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{III b})$$

- Zákony distributivní (distributivita)

$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c) \quad (\text{IV a}) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{IV b})$$

- Existence komplementu (komplementárnost)

$$a \cdot a' = 0 \quad (\text{V a}) \quad a + a' = 1 \quad (\text{V b})$$

- V množině B existují alespoň dva různé prvky (VI)

- Teorémy
 - Jsou odvozeny na základě axiomů Booleovy algebry a definují další užitečné vlastnosti
- Důkazy lze provést
 - Systematickou aplikací axiomů a již dříve dokázaných teorémů
 - Pomocí Vennových diagramů, atd.
- Příklad
 - Důkazu distributivního zákona pomocí úplné indukce

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Použitím úplné indukce
 - Postupně vyčíslujeme hodnoty výrazů pro všechny možné kombinace hodnot vstupních proměnných; pokud se vždy dosáhne správného výsledku, je dokázáno, že daný výraz platí

a	b	c	(b+c)	a·b	a·c	a·(b+c)	a·b+a·c
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

- Jediněčnost 0 a 1

- Prvek 0 je v axiomu $a + 0 = a$ (II a) jedinečný (VII a)

- Prvek 1 je v axiomu $a \cdot 1 = a$ (II b) jedinečný (VII b)

- Idempotence

$$a + a = a \quad (\text{VIII a})$$

$$a \cdot a = a \quad (\text{VIII b})$$

- Agresivita 1 a 0

$$a + 1 = 1 \quad (\text{IX a})$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad (\text{IX b})$$

- Absorpce

$$a + a \cdot b = a \quad (\text{X a})$$

$$a \cdot (a + b) = a \quad (\text{X b})$$

- Existence jediného komplementu: a' je plně určen a (XI)

- DeMorganovy zákony

$$(a + b)' = a' \cdot b' \quad (\text{XII a})$$

$$(a \cdot b)' = a' + b' \quad (\text{XII b})$$

- Zákony asociativní (asociativita)

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{XIII a})$$

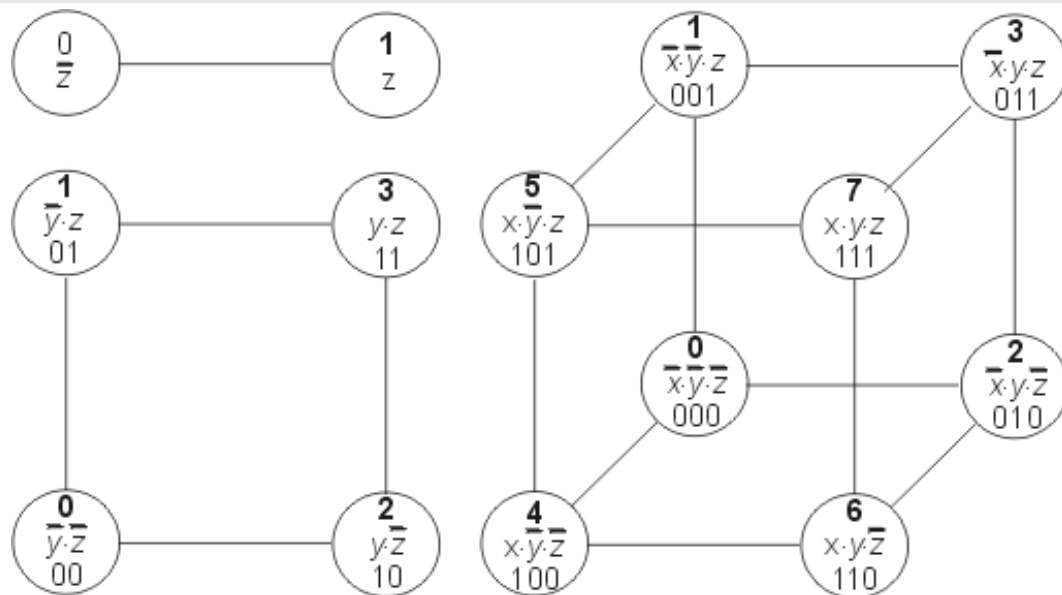
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{XIII b})$$

- Logické proměnné x_1, x_2, \dots, x_n
 - Nabývají hodnot 0 a 1 (logické konstanty)
 - Budeme značit písmeny: $A, B, C, \dots, a, b, c, \dots, x_1, x_2, \dots$
 - Poznámka: pro jednodušší zápis budeme logický součin značit jak symboly „ $X \cdot Y$ “, tak „ XY “ – pozor na záměnu s proměnnou „ XY “
- Logická funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je zobrazení $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
 - Hodnota log. funkce je buď 1, nebo 0, v závislosti na hodnotách (0, 1) jednotlivých proměnných x_1, x_2, \dots, x_n
 - Pro n proměnných (každá má 2 možné hodnoty) máme 2^n možností, jak jim přiřadit hodnoty
 - Existuje celkem 2^{2^n} různých log. funkcí n proměnných
- Logický výraz (řetězec symbolů)
 - Obsahuje log. konstanty, log. proměnné a log. operátory
 - Log. výrazy lze upravovat a zjednodušovat s využitím Booleovy algebry – cílem je splnění daných kritérií (cena, rychlost, příkon atd.)

- Normální báze – (x,y,z)
 - Proměnným jsou přiřazeny váhy mocnin báze 2
- Log. funkce – $F(x,y,z)$
 - Vstupní stav – kombinace vstupních log. proměnných (vstupů)
 - Stavový index – s ... desítkové číslo udávající hodnotu log. stavu
 - Neurčený stav – X (anglicky don't care)
 - Stav, kdy není třeba určit, zda při daném vstupním stavu má pravdivostní hodnota funkce $F(x,y,z)$ hodnotu 0, nebo 1
 - Log. funkce určena – pro všechny možné vstupní stavy existuje jednoznačné určení pravdivostních hodnot log. funkce $F(x,y,z)$

stavový index s	vstupní stav			pravdivostní hodnoty
	4	2	1	$F(x,y,z)$
	x	y	z	
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	X
6	1	1	0	1
7	1	1	1	X

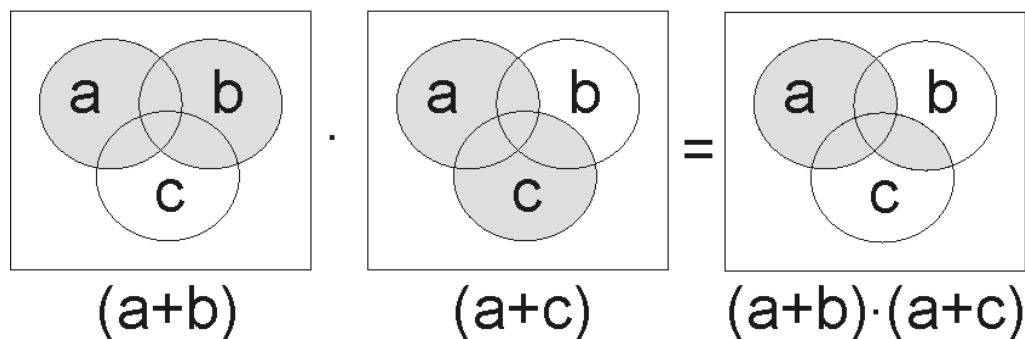
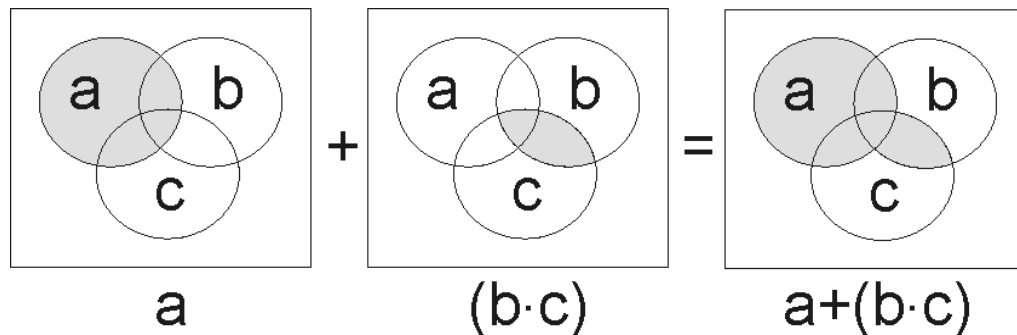
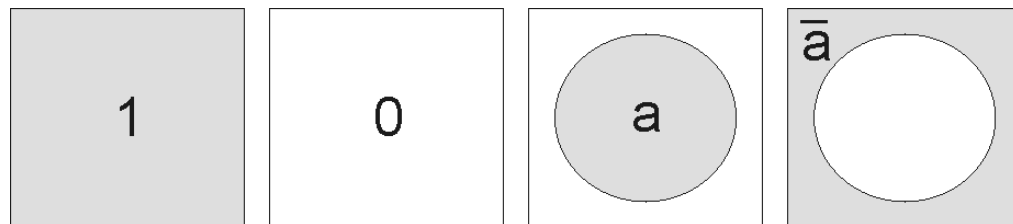
- Neorientovaný graf
- Reprezentace log. funkce N proměnných
 - S více než čtyřmi rozměry se špatně pracuje
- Uzly
 - Reprezentují hodnoty vstupního stavu
 - Počet uzlů je 2^N
- Hrany
 - Spojují uzly, které se liší pouze v jedné proměnné (sousednost)



- Význam
 - Proměnnou, ve které se liší uzly krychle, lze eliminovat
 - Např.: pro dvourozměrnou krychli a stavy 3 (binárně 11) a 2 (binárně 10) platí

$$yz + y\bar{z} = y$$

- Prvky množin jsou znázorněny jako uzavřené plochy
- Log. součet = sjednocení příslušných ploch
- Log. součin = průnik příslušných ploch
- Příklad:
 - Reprezentace distributivního zákona pomocí tzv. Vennových diagramů



- Log. výrazy v disjunktivní formě a pravdivostní tabulka

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)$$

$$f_2 = (x_1 \cdot \bar{x}_2)$$

$$f_3 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2)$$

$$f_4 = (\bar{x}_1 \cdot x_2)$$

$$f_5 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2)$$

$$f_6 = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2)$$

$$f_7 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2)$$

$$f_8 = (x_1 \cdot x_2)$$

$$f_9 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2)$$

$$f_{10} = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2)$$

$$f_{11} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2)$$

$$f_{12} = (\bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2)$$









$$f_{13} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2)$$

$$f_{14} = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2)$$









$$f_{15} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = 1$$

x_2	x_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- Vennovy diagramy, logické funkce a operace

	Kontradikce	$f_0 = 0$
	Pierceova funkce (NOR)	$f_1 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) = \overline{x_1 + x_2} = (x_1 \downarrow x_2)$
	Inhibice	$f_2 = (x_1 \cdot \bar{x}_2) = \overline{(x_1 \Rightarrow x_2)}$
	Negace (NOT)	$f_3 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2) = \bar{x}_2$
	Inhibice	$f_4 = (\bar{x}_1 \cdot x_2) = \overline{(x_2 \Rightarrow x_1)}$
	Negace (NOT)	$f_5 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2) = \bar{x}_1$
	Exkluzivní součet (XOR)	$f_6 = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2) = (x_1 \oplus x_2)$
	Shefferova fce (NAND)	$f_7 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2) = \overline{(x_1 \cdot x_2)} = (x_1 \uparrow x_2)$

- Vennovy diagramy, logické funkce a operace

	Log. součin (AND)	$f_8 = (x_1 \cdot x_2)$
	Ekvivalence (XNOR)	$f_9 = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2) = (x_1 \Leftrightarrow x_2)$
	Identita	$f_{10} = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2) = x_1$
	Implikace	$f_{11} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2) = (x_1 + \bar{x}_2) = (x_2 \Rightarrow x_1)$
	Identita	$f_{12} = (\bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = x_2$
	Implikace	$f_{13} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = (\bar{x}_1 + x_2) = (x_1 \Rightarrow x_2)$
	Log. součet (OR)	$f_{14} = (x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = (x_1 + x_2)$
	Tautologie	$f_{15} = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2) = 1$

- Term
 - Uspořádaná skupina proměnných a operátorů
- Úplná normální disjunktivní forma (ÚNDF)
 - Suma součinů (anglicky též Sum Of Products – SOP)
 - Termům říkáme implikanty (mintermy)
- Částečně minimalizovaná ÚNDF
 - Zkrácená normální disjunktivní forma (ZNDF)
- Minimální možné řešení
 - Minimální normální disjunktivní forma (MNDF)

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$\begin{aligned}F(x, y, z) &= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot \bar{z} \\ &= \bar{x} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{z} \\ &= \bar{z}\end{aligned}$$

- Součin sum
 - Sepisujeme kombinace vstupních proměnných, ve kterých nabývá funkce hodnoty log. 0

s	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

- Proměnné zapisujeme komplementárně

- Úplná normální konjunktivní forma (ÚNKF)

- Součin sum (anglicky Product Of Sums – POS)
- Termům zde říkáme implicenty (maxtermy)

- Částečně minimalizovaná

- Zkrácená normální konjunktivní forma (ZNKF)

$$F(x, y, z)$$

- Minimální řešení

$$= (x + y + \bar{z}) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

- Minimální normální konjunktivní forma (MNKF)

$$= (x + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{z})$$

$$= \bar{z}$$

- Nezkrácená ÚNDF

$$F(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot \bar{z}$$

- Varianty zkráceného zápisu ÚNDF

$$F(x, y, z) = \vee(0,2,4,6) = 1(0,2,4,6) = \Sigma m(0,2,4,6)$$

- V závorce jsou uvedeny stavové indexy, pro které nabývá funkce hodnoty log. 1
- Před závorkou máme označení disjunktí formy pomocí operátoru log. součtu či sumy implikantů (m jako minterm)

- Nezkrácená ÚNKF

$$F(x, y, z) = (x + y + \bar{z}) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

- Varianty zkráceného zápisu ÚNKF

- V závorce jsou uvedeny stavové indexy, pro které nabývá funkce hodnoty log. 0
- Před závorkou máme označení konjunktí formy pomocí operátoru log. součinu či součinu implicantů (M jako Maxterm).

$$F(x, y, z) = \wedge(1,3,5,7) = \&(1,3,5,7) = \Pi M(1,3,5,7)$$

- Pokud log. funkce nabývá pro nějakou kombinaci vstupních proměnných neurčené hodnoty X , pak ji můžeme interpretovat jako hodnotu log. 1 či log. 0
 - Toho lze z výhodou využít při minimalizaci funkce
- Příklad možného zkrácení ÚNDF zápisu neúplně definované funkce

$$\begin{aligned} F(w, x, y, z) &= \vee(2,3,4,6,8,9,13) + x(7,12) \\ &= 1(2,3,4,6,8,9,13) + x(7,12) \\ &= \Sigma m((2,3,4,6,8,9,13) + x(7,12)) \end{aligned}$$

s	w	x	y	z	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

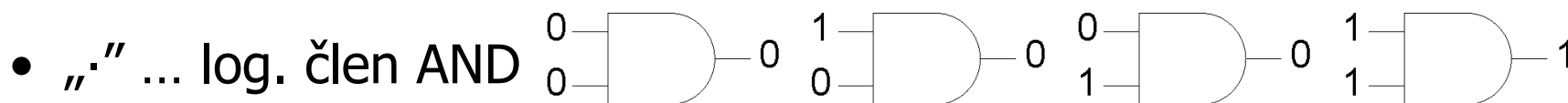
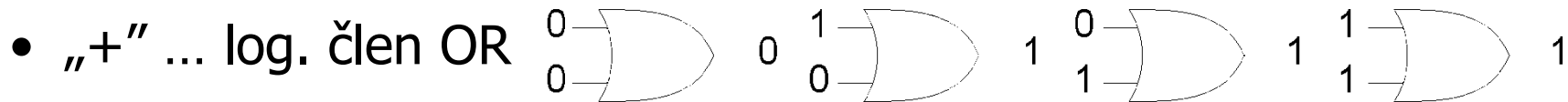
- Definiční tabulka
 - Logický součet

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Logický součin

·	0	1
0	0	0
1	0	1

- Logické operace se realizují tzv. logickými členy



- Chování log. členů lze definovat např. pravdivostní tabulkou

- OR

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

a	b	a·b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

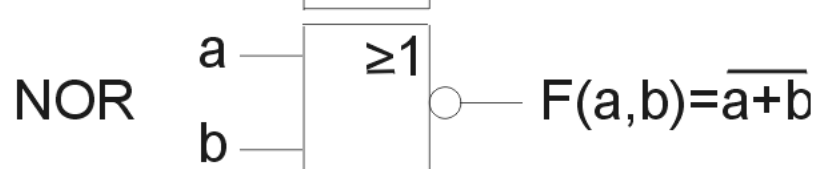
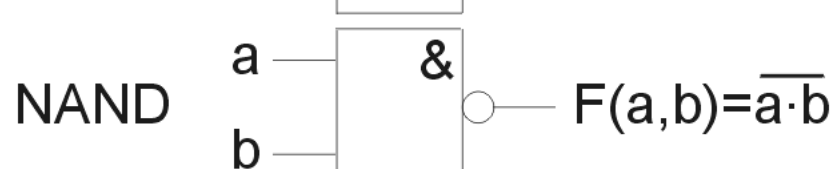
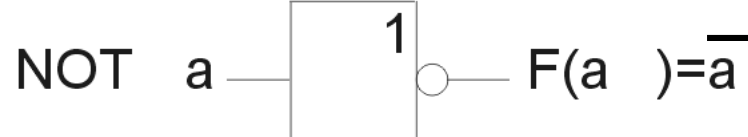
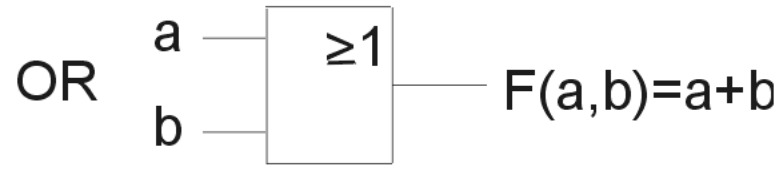
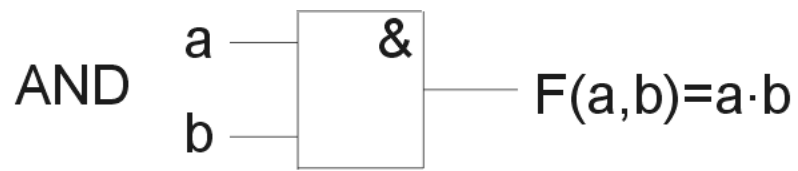
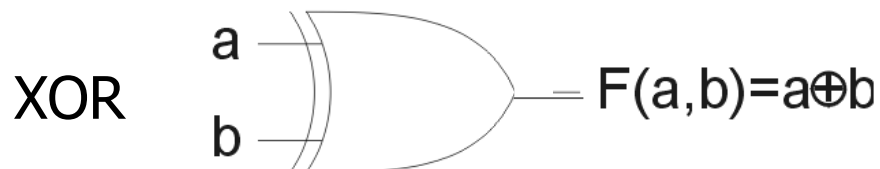
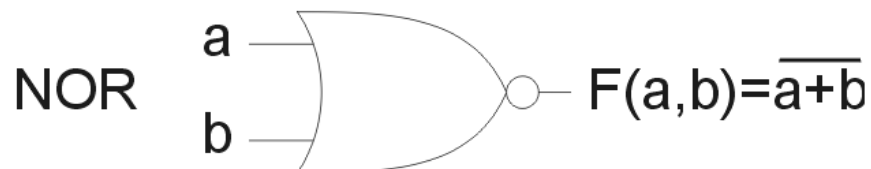
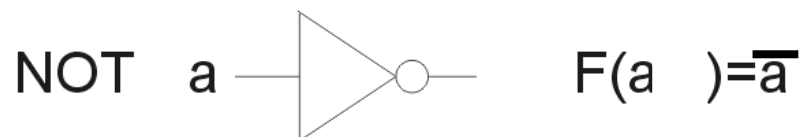
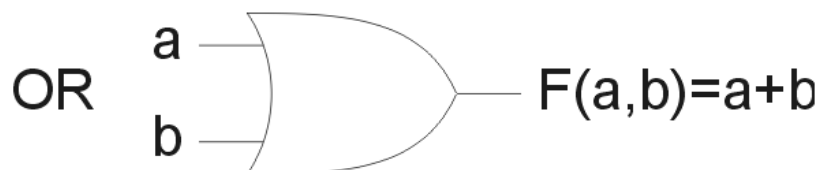
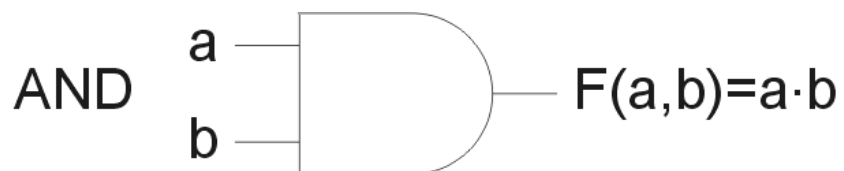
NOT

a	not(a)
0	1
1	0



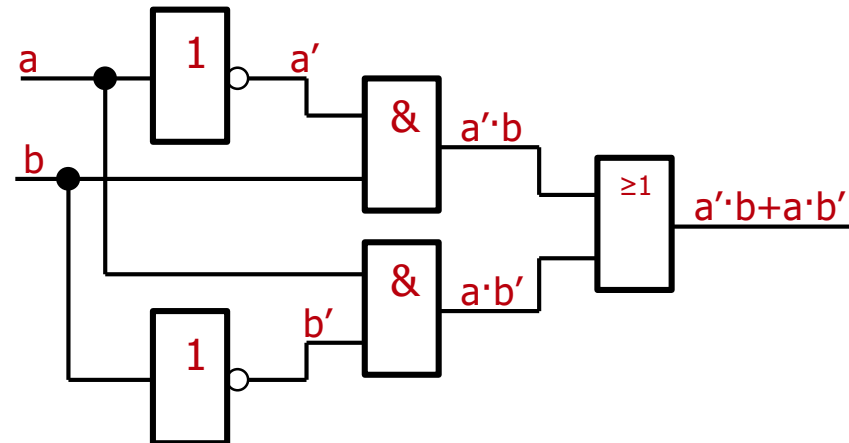
- Standard IEEE/ANSI Std 91-1984

- Standard IEC 60617-12



- Postupným nahrazením operací ve výrazech za logické členy
- Postupujeme od nejvnitřnějších operací (obvykle komplementy proměnných)
- Vstupy a výstupy log. členů propojeny skrze vodiče
- Spojení dvou vodičů označeno černým puntíkem
- Příklad

$$(\bar{a} \cdot b) + (a \cdot \bar{b})$$

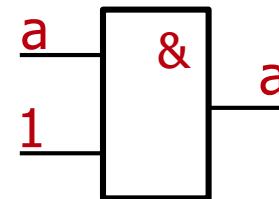
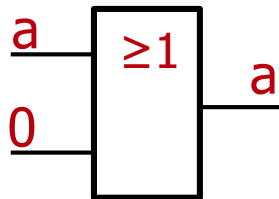


- Neutralita prvků 0 a 1

$$a + 0 = a \quad (\text{II a})$$

$$a \cdot 1 = a \quad (\text{II b})$$

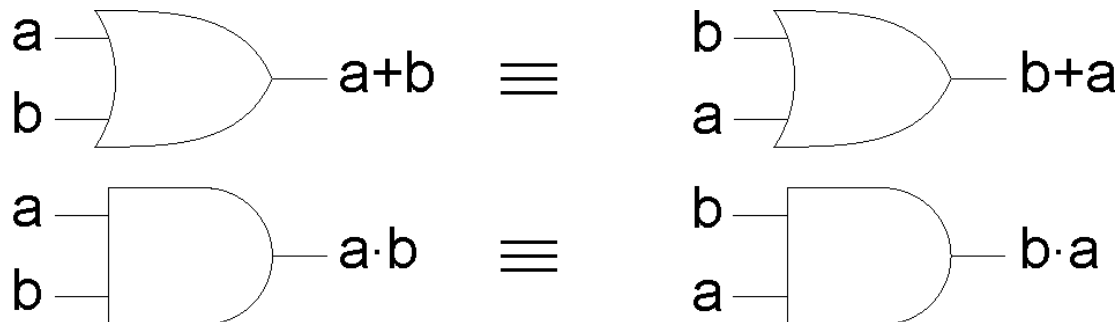
- Z hlediska případné realizace logických obvodů z log. členů tento axiom říká, že přičtení log. nuly, resp. vynásobení log. jedničkou, nezmění hodnotu proměnné
- Uvedenou operaci tedy není třeba realizovat a můžeme tak ušetřit příslušné log. členy



- Zákony komutativní

$$a + b = b + a \quad (\text{III a}) \qquad a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{III b})$$

- V případě realizace log. obvodů z log. členů AND a OR je jedno, na který ze vstupů přivedeme příslušnou log. proměnnou – jsou symetrické
- Máme tedy volnost při volbě vstupů příslušných log. členů, čehož se s výhodou využívá při implementaci log. obvodů, např. v integrovaných obvodech, na deskách s plošnými spoji apod.

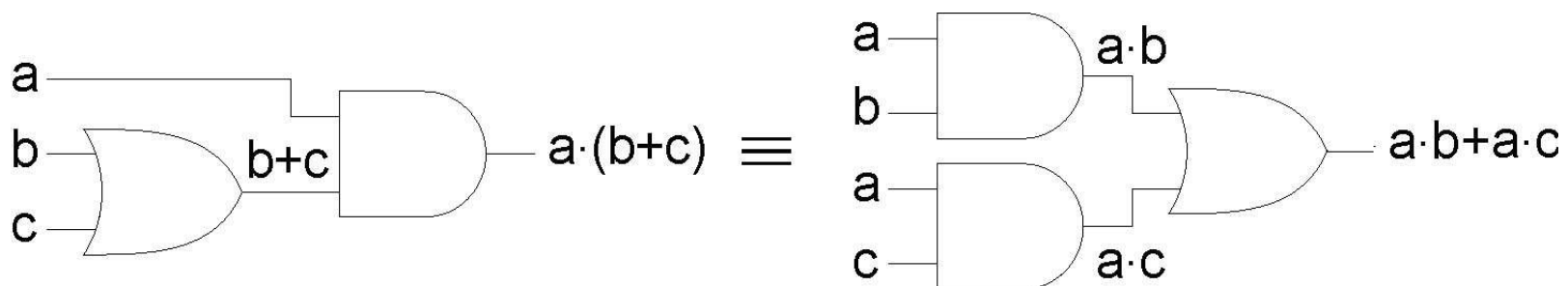


- Zákony distributivní

$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c) \quad (\text{IV a})$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{IV b})$$

- Výrazy lze zjednodušovat eliminací společné proměnné
- Vidíme, že aplikací distributivního zákona můžeme ušetřit jeden log. člen AND se dvěma vstupy (1/3 log. členů) a dva vodiče (2/7 všech vodičů)



- Idempotence

$$a + a = a \quad (\text{VIII a})$$

$$a \cdot a = a \quad (\text{VIII b})$$

- Důkaz

- Postupnou aplikací dříve uvedených zákonů

$$\begin{aligned} a + a &= (a + a) \cdot 1 \\ &= (a + a) \cdot (a + \bar{a}) \\ &= a + a \cdot \bar{a} \\ &= a + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

- Význam

- Ve výrazech je možno zjednodušit výraz a ušetřit tak příslušný logický člen

- Agresivita 0 a 1

$$a + 1 = 1 \quad (\text{IX a})$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad (\text{IX b})$$

- Důkaz

$$a + 1 = (a + 1) \cdot 1$$

$$= (a + 1) \cdot (a + \bar{a})$$

$$= a + 1 \cdot \bar{a}$$

$$= a + \bar{a}$$

$$= 1$$

- Význam

- Eliminace zbytečných členů

- Absorpce

$$a + a \cdot b = a \quad (\times a)$$

$$a \cdot (a + b) = a \quad (\times b)$$

- Důkaz

$$a + a \cdot b = a \cdot 1 + a \cdot b$$

$$= a \cdot (1 + b)$$

$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

- Význam

- Eliminace přebytečné proměnné ve výrazu

- Existence jediného komplementu

- Důkaz

- Předpokládejme, že dva prvky $x, y \in B$ mají vlastnost komplementu prvku a , tedy:

- Platí (agresivita 0 a 1):

$$x = 1 \cdot x$$

$$a \cdot x = 0 \quad a + x = 1$$

$$x = (a + y) \cdot x$$

$$a \cdot y = 0 \quad a + y = 1$$

$$x = (a \cdot x) + (y \cdot x)$$

- Platí (zákon distributivní):

$$x = 0 + (y \cdot x)$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x = y \cdot x$$

- Platí tedy, že $x = y$, což je v rozporu s předpokladem

- DeMorganovy zákony

$$a + b = (a' \cdot b')' \quad (\text{XII a}) \qquad a \cdot b = (a' + b')' \quad (\text{XII b})$$

$$(a + b)' = a' \cdot b' \qquad (a \cdot b)' = a' + b'$$

- Zobecnění pro více proměnných

$$(a + b + c + \dots)' = a' \cdot b' \cdot c' \dots \qquad (a \cdot b \cdot c \dots)' = a' + b' + c' + \dots$$

- Důkaz (úplnou indukcí)

a	b	a+b	not(a+b)	not(a)	not(b)	not(a).not(b)
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

- Využití

- Negace součtu lze nahradit součinem negací, resp. negace součinu součtem negací

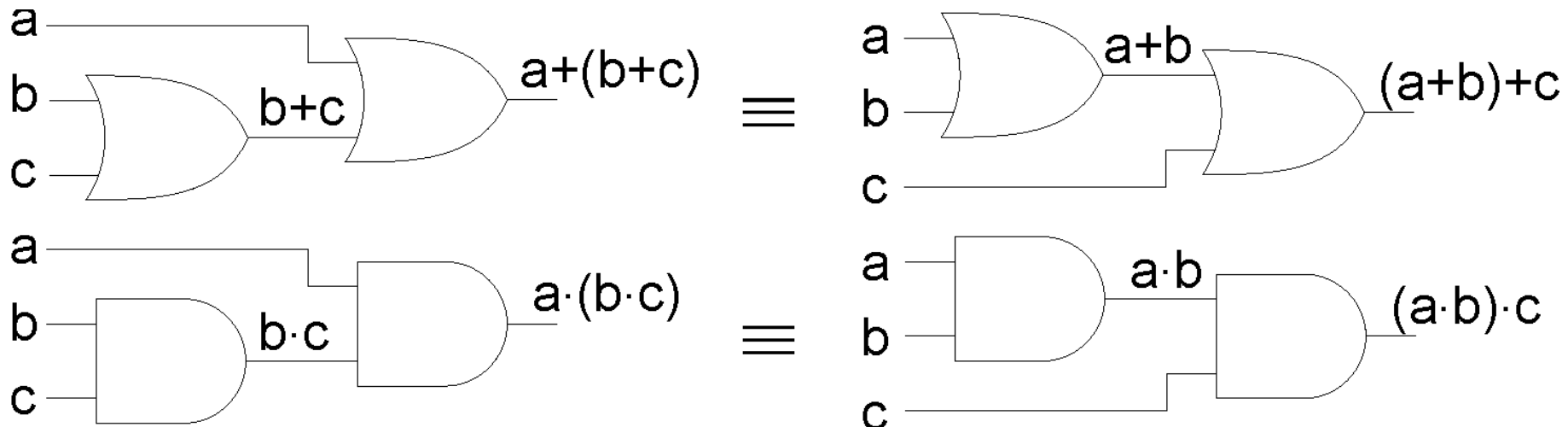
- Zákony asociativní

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{XIII a})$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{XIII b})$$

- Využití

- Nezáleží na pořadí vyčíslování operací log. součtu a součinu
- Realizace log. operací i více proměnných než dvou může být provedena pouze s log. členy se dvěma vstupy



- Involuce (dvojitá negace)

$$\overline{\overline{a}} = a$$

- Důkaz

- Pomocí úplné indukce

$$\overline{\overline{1}} = \overline{0} = 1$$

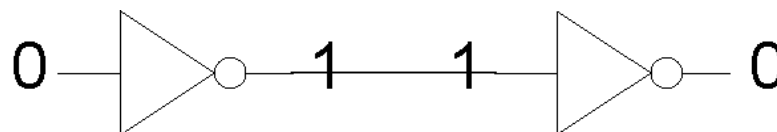
$$a = 0$$

$$\overline{\overline{0}} = \overline{1} = 0$$

$$a = 1$$

- Využití

- Není třeba dávat dva invertory za sebe



- Absorpce negace

$$a + a' \cdot b = a + b \qquad a \cdot (a' + b) = a \cdot b$$

- Důkaz

$$\begin{aligned} a + a' \cdot b &= (a + a') \cdot (a + b) \\ &= 1 \cdot (a + b) \\ &= a + b \end{aligned}$$

- Využití

- Možnost eliminace přebytečného komplementu proměnné ve výrazu

- Sousednost (spojování, adjacency)

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a \quad (a + b) \cdot (a + \bar{b}) = a$$

- Důkaz

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a \cdot (b + \bar{b})$$

$$= a \cdot 1$$

$$= a$$

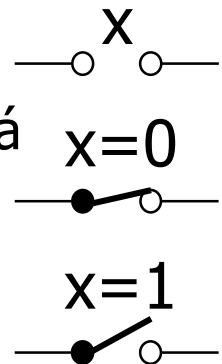
- Význam

- Lze eliminovat přebytečné proměnné vyskytující se jak v přímé, tak komplementární formě ve výrazu
- Uplatňuje se v řadě tzv. minimalizačních technik (např. Karnaughova mapa, metoda Quine-McCluskey atd.) vypracovaných pro systematické zjednodušování logických výrazů

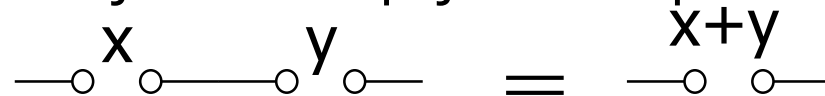
- Ukazuje analogii mezi reprezentací 0 a 1 ve dvouhodnotové Booleově algebře a uzavřenými resp. otevřenými obvody (sepnutými resp. rozepnutými kontakty relé) – diplomová práce 1936, publikováno 1938

Definice

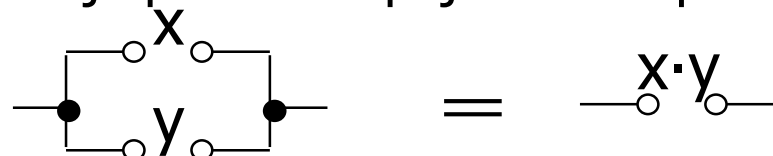
- Proměnná „ x “ reprezentuje spínač
- Hodnota „0“ reprezentuje sepnutý kontakt (teoreticky nulová impedance,): $x=0$
- Hodnota „1“ reprezentuje rozepnutý kontakt (teoreticky nekonečně velká impedance): $x=1$
- $x=y$: pokud je $x=0$, tak $y=0$ a pokud je $x=1$, tak $y=1$



- Operace OR definuje sériové spojení dvou proměnných



- Operace AND definuje paralelní spojení dvou proměnných



- (1 a) $0 \cdot 0 = 0$
 - Uzavřený obvod (kontakt) paralelně s uzavřeným obvodem je uzavřený obvod
- (2 a) $1 + 0 = 0 + 1 = 1$
 - Otevřený obvod v libovolném pořadí v sérii s uzavřeným obvodem je otevřený obvod
- (3 a) $0 + 0 = 0$
 - Uzavřený obvod v sérii s uzavřeným obvodem je uzavřený obvod
- (4)
 - V každém okamžiku je buď $x=0$, nebo $x=1$
- (1 b) $1 + 1 = 1$
 - Otevřený obvod (kontakt) v sérii s otevřeným obvodem je otevřený obvod
- (2 b) $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$
 - Uzavřený obvod v libovolném pořadí paralelně s otevřeným obvodem je uzavřený obvod
- (3 b) $1 \cdot 1 = 1$
 - Otevřený obvod paralelně s otevřeným obvodem je otevřený obvod

- Na základě axiomů lze ukázat, že platí následující teorémy (důkaz např. úplnou indukcí):
 - (1 a) $x+y=y+x$
 - (2 a) $x+(y+z)=(x+y)+z$
 - (3 a) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$
 - (4 a) $1\cdot x=x$
 - (5 a) $1+x=1$
 - (6 a) $x+x'=1$
 - (7 a) $0'=1$
 - (8) $(x')'=x$
 - (1 b) $x\cdot y=y\cdot x$
 - (2 b) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
 - (3 b) $x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$
 - (4b) $0+x=x$
 - (5 b) $0\cdot x=0$
 - (6 b) $x\cdot x'=0$
 - (7 b) $1'=0$
- De Morganův teorém (zobecněný pro více proměnných)
 - $(x+y+z+\dots)'=x'\cdot y'\cdot z'\cdot\dots$ $(x\cdot y\cdot z\cdot\dots)'=x'+y'+z'+\dots$
- Shannonův teorém – viz dále

- Využívá pouze log. funkci NAND – $(a \cdot b)'$, $a \uparrow b$, $\overline{a \cdot b}$
 - Lze ukázat, že pomocí funkce NAND lze realizovat základní log. členy a tedy i veškeré logické funkce
- Platí zákon komutativní $(a \cdot b)' = (b \cdot a)'$
- Neplatí zákona asociativní $((a \cdot b)' \cdot c)' \neq (a \cdot (b \cdot c))'$

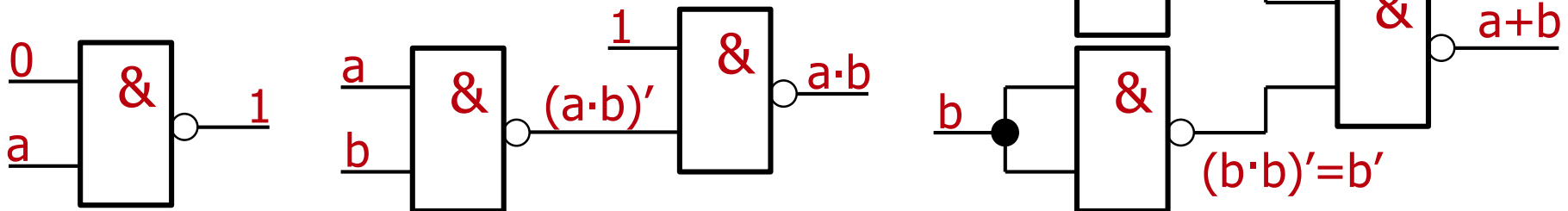
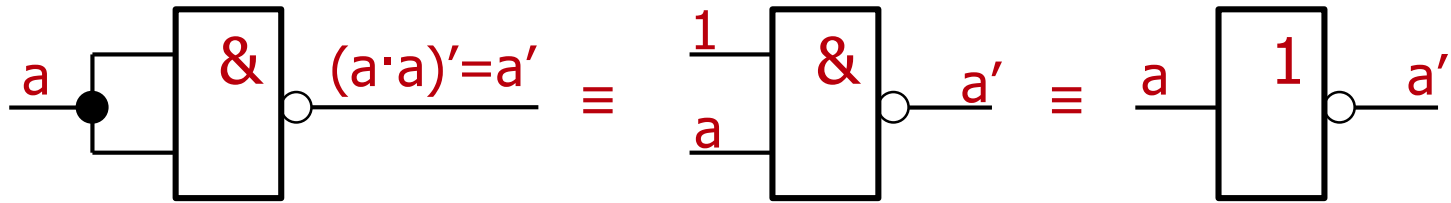
$$(a \cdot a)' = a'$$

$$(a \cdot 0)' = 1$$

$$(a \cdot 1)' = a'$$

$$(a \cdot b)' \cdot 1 = ((a \cdot b)')' = a \cdot b$$

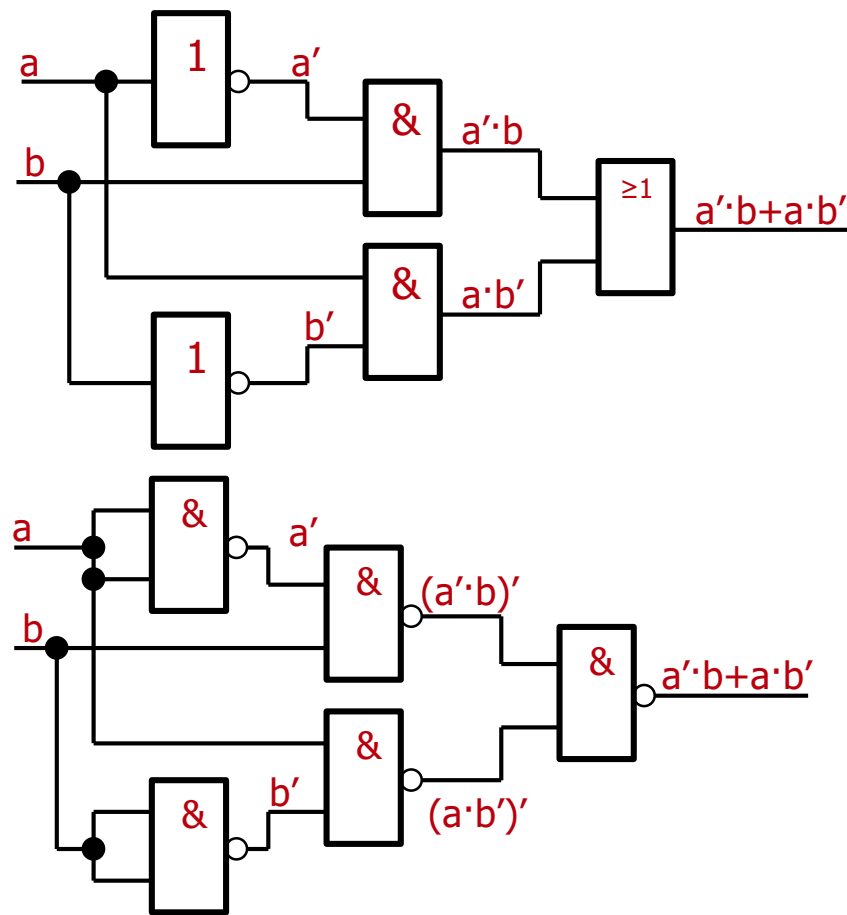
$$((a \cdot a)' \cdot (b \cdot b)')' = (a' \cdot b')' = a + b$$



- Využití teorémů:
 - Involuce (dvojitá negace)
 - de Morganovy zákony
- Pro implementaci výrazu stačí pouze členy NAND
- Příklad

$$\begin{aligned} & \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b} \\ & \overline{\overline{\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}}} \\ & = \overline{\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}} \\ & = \overline{\bar{a} \cdot b} \cdot \overline{a \cdot \bar{b}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{a}} &= a \\ \overline{a + b} &= \bar{a} \cdot \bar{b} \end{aligned}$$



- Využívá pouze log. funkci NOR – $(a+b)'$, $a \downarrow b$
 - Lze ukázat, že pomocí funkce NOR lze realizovat základní log. členy a tedy i veškeré logické funkce

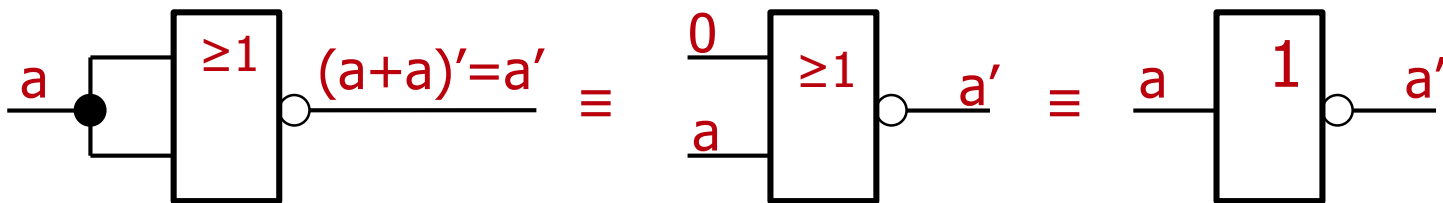
• Platí zákon komutativní $(a+b)' = (b+a)'$

• Neplatí zákona asociativní $((a+b)'+c)' \neq (a+(b+c))'$

$$(a+a)' = a'$$

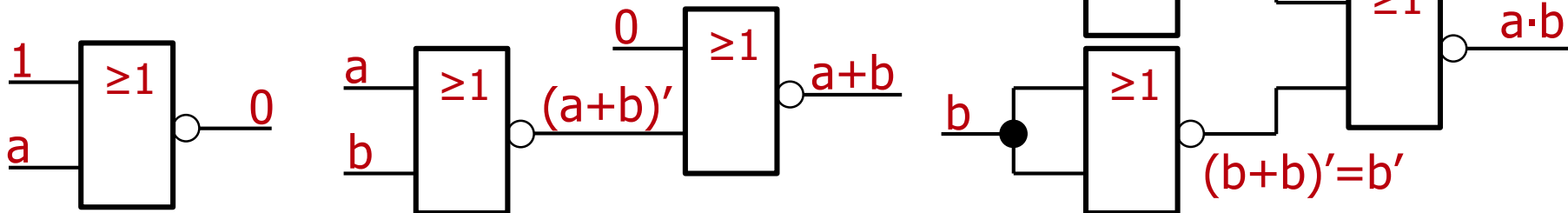
$$(a+0)' = a'$$

$$(a+1)' = 0$$



$$(a+b)'+0 = ((a+b)')' = a+b$$

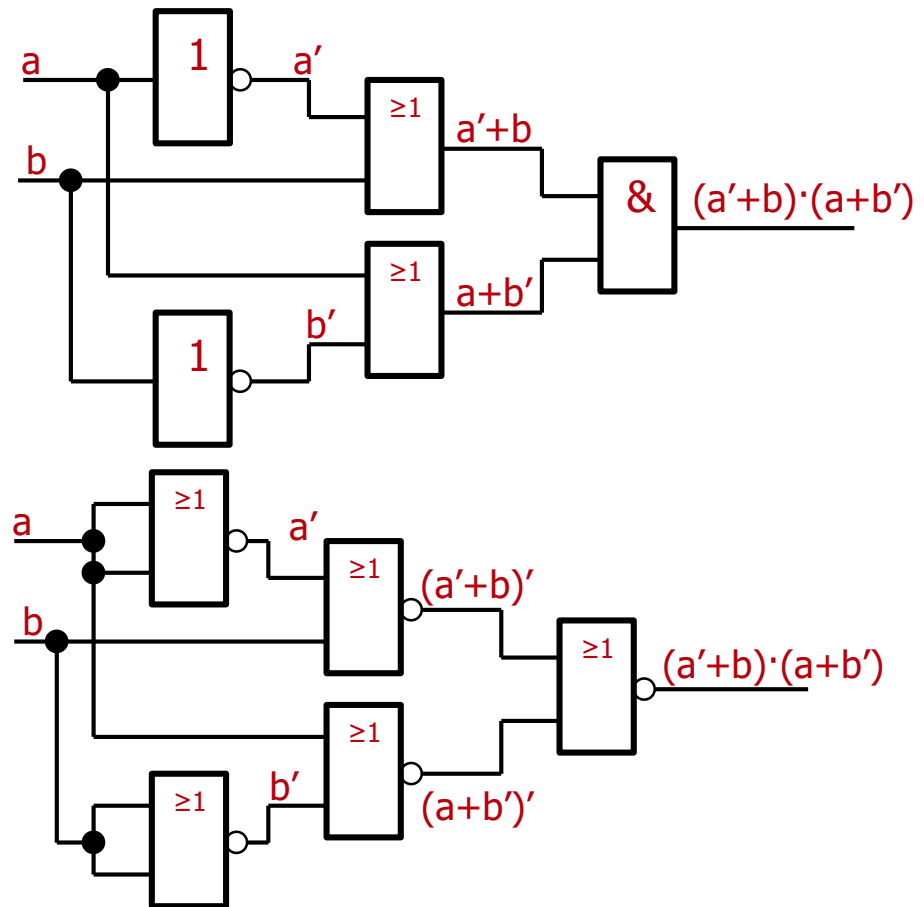
$$((a+a)'+(b+b)')' = (a'+b')' = a \cdot b$$



- Využití teorémů:
 - Involuce (dvojitá negace)
 - de Morganovy zákony
- Pro implementaci výrazu stačí pouze člen NOR
- Příklad

$$\begin{aligned}
 & (\bar{a} + b) \cdot (a + \bar{b}) \\
 & \overline{\overline{(\bar{a} + b) \cdot (a + \bar{b})}} \\
 & = \overline{\overline{(\bar{a} + b)} \cdot \overline{\overline{(a + \bar{b})}}} \\
 & = \overline{\bar{a} + b + a + \bar{b}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\bar{a}} &= a \\
 \overline{a \cdot b} &= \bar{a} + \bar{b}
 \end{aligned}$$



- Pro realizaci libovolné log. funkce využívá pouze log. členů XOR a AND
- Platí

$$a \oplus b = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

$$a \oplus \bar{a} = 1$$

$$a \oplus 1 = \bar{a}$$

$$a \oplus b \oplus (a \cdot b) = a + b$$

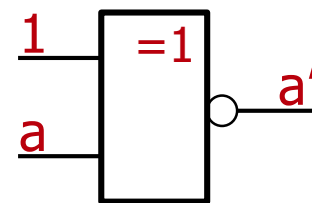
$$a \oplus (\bar{a} \cdot b) \oplus 1 = b \oplus (a \cdot \bar{b}) \oplus 1 = \overline{a + b}$$

$$1 \oplus b \oplus (a \cdot b) = a + \bar{b}$$

$$a \cdot (1 \oplus b) = a \cdot \bar{b}$$

$$a \oplus b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

Příklady



$$\bar{a} \cdot b + \bar{a} \cdot d$$

$$= \bar{a} \cdot (b + d)$$

$$= (a \oplus 1) \cdot (b \oplus d \oplus (b \cdot d))$$

• Příklad

$$a \oplus b$$

$$= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

$$= \overline{\overline{a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b}}$$

$$a \oplus b$$

$$= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

$$= 0 + a \cdot \bar{b} + 0 + \bar{a} \cdot b$$

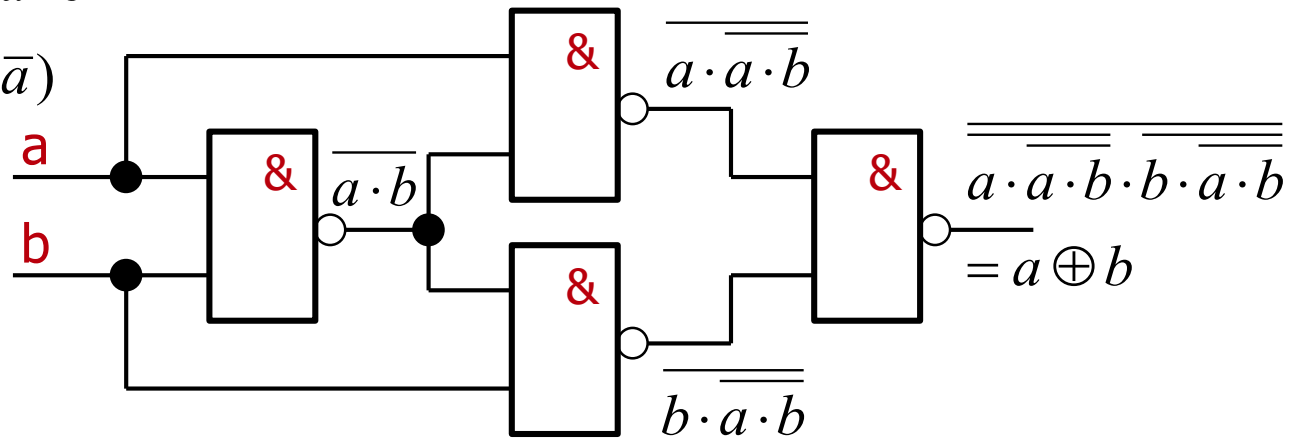
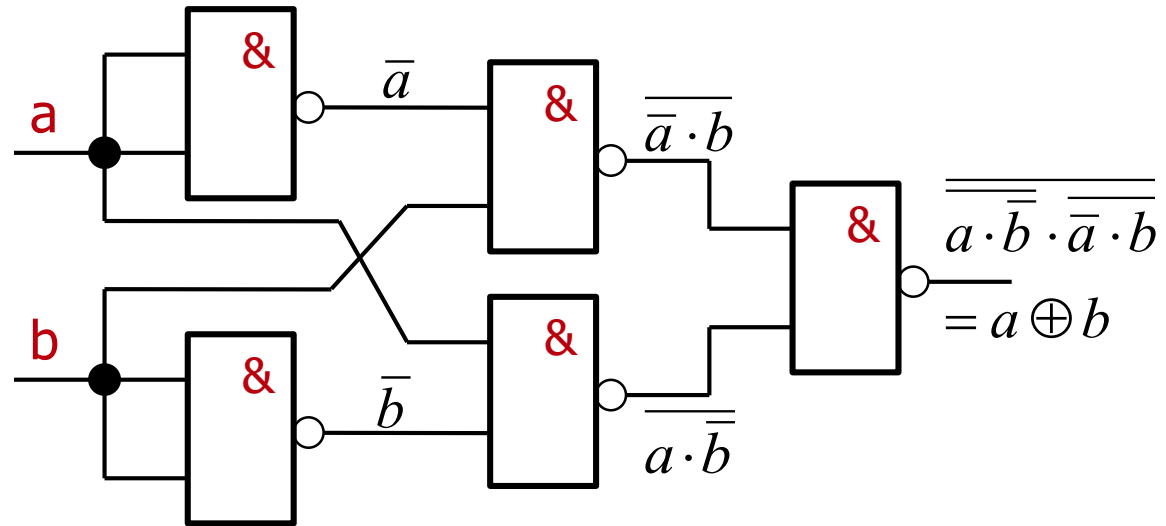
$$= a \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

$$= a \cdot (\bar{a} + \bar{b}) + b \cdot (\bar{b} + \bar{a})$$

$$= a \cdot \overline{a \cdot b} + b \cdot \overline{a \cdot b}$$

$$= \overline{\overline{a \cdot a \cdot b} + \overline{b \cdot a \cdot b}}$$

$$= \overline{\overline{a \cdot a \cdot b} \cdot \overline{b \cdot a \cdot b}}$$



- Shannonův teorém podle vybrané proměnné

- ÚNDF

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\bar{x}_k \cdot f(x_1, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)] + [x_k \cdot f(x_1, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n)]$$

- ÚNKF

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\bar{x}_k + f(x_1, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n)] \cdot [x_k + f(x_1, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)]$$

- Např. podle proměnné x_1 _____

- ÚNDF $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\underline{x_1} \cdot f(0, x_2, \dots, x_n)] + [x_1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n)]$

- ÚNKF $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_1 + f(1, x_2, \dots, x_n)] \cdot [x_1 + f(0, x_2, \dots, x_n)]$

- Platí dualita funkcí

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 1, +, \cdot) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, 1, 0, \cdot, +)$$

- Důsledek

- Každou log. funkci libovolného počtu proměnných lze realizovat pomocí základních log. operací AND, OR a NOT dvou proměnných - superpozice logických funkcí

- Shannonův teorém - příklad
 - Rozklad funkce dle proměnné x_1

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ &= x_1 \cdot (x_2 \cdot \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \cdot (x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3)\end{aligned}$$

$$f(x_1 = 1) = x_2 \cdot \bar{x}_3$$

$$f(x_1 = 0) = x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3$$

- Rozklad funkce dle proměnné x_2

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ &= x_2 \cdot (x_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1) + \bar{x}_2 \cdot (\bar{x}_1 \cdot x_3)\end{aligned}$$

$$f(x_2 = 1) = x_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1$$

$$f(x_2 = 0) = \bar{x}_1 \cdot x_3$$

- Rozklad funkce dle proměnné x_3

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ &= x_3 \cdot (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2) + \bar{x}_3 \cdot (x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2)\end{aligned}$$

$$f(x_3 = 1) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2$$

$$f(x_3 = 0) = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2$$

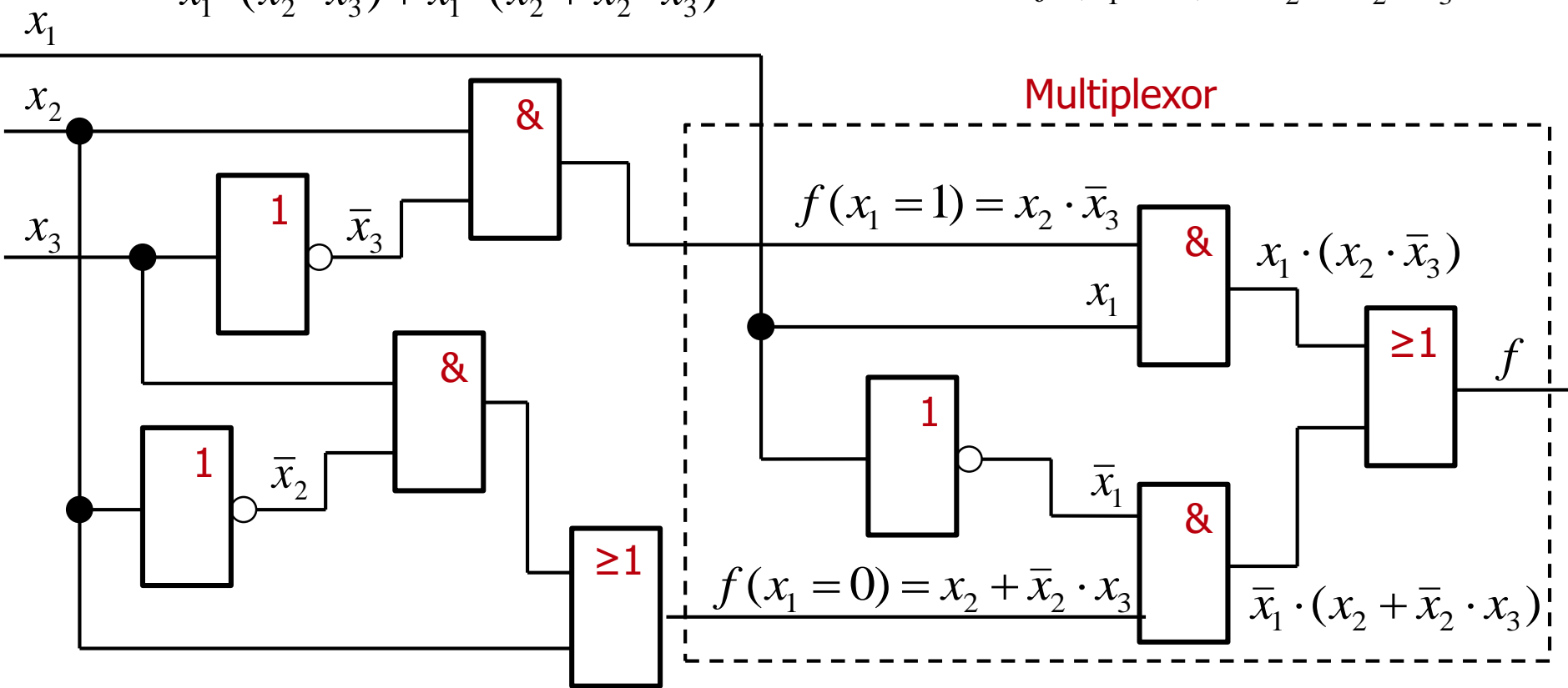
- Shannonův teorém - příklad
 - Rozklad funkce dle proměnné x_1

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$$

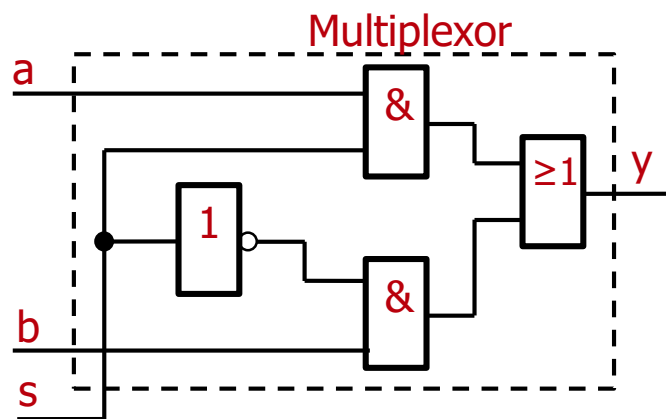
$$= x_1 \cdot (x_2 \cdot \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \cdot (x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3)$$

$$f(x_1 = 1) = x_2 \cdot \bar{x}_3$$

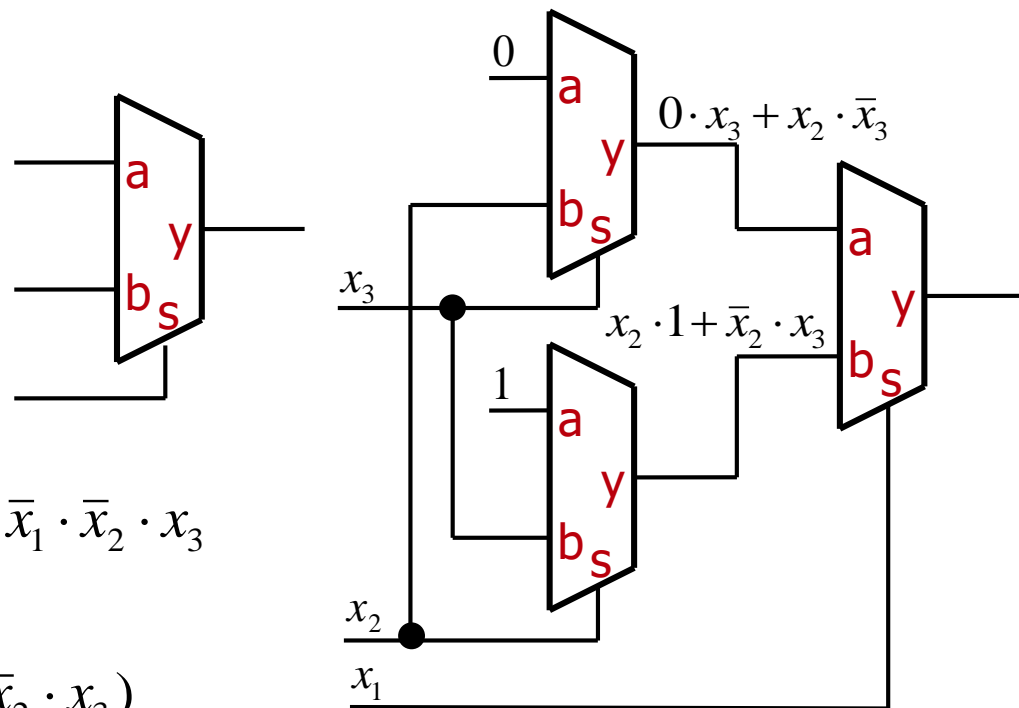
$$f(x_1 = 0) = x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3$$



- Shannonův teorém - rozklad podle více proměnných
- Důsledek
 - Každá log. funkce může být implementována pouze pomocí multiplexorů (podrobněji budou probírány později)
 - Poznámka: zvyšuje se zpoždění obvodu
- Příklad



≡



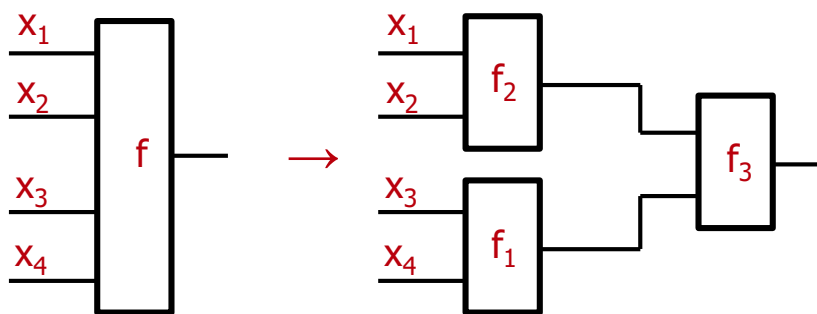
$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\
 &= x_1 \cdot (x_2 \cdot \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \cdot (x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3) \\
 &= x_1 \cdot (0 \cdot x_3 + x_2 \cdot \bar{x}_3) + \bar{x}_1 \cdot (x_2 \cdot 1 + \bar{x}_2 \cdot x_3)
 \end{aligned}$$

- Disjunktční rozklad
 - Množiny vstupních proměnných jsou vzájemně disjunktční

- Na podfunkce

- Např.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_3(f_2(x_1, x_2), f_1(x_3, x_4))$$



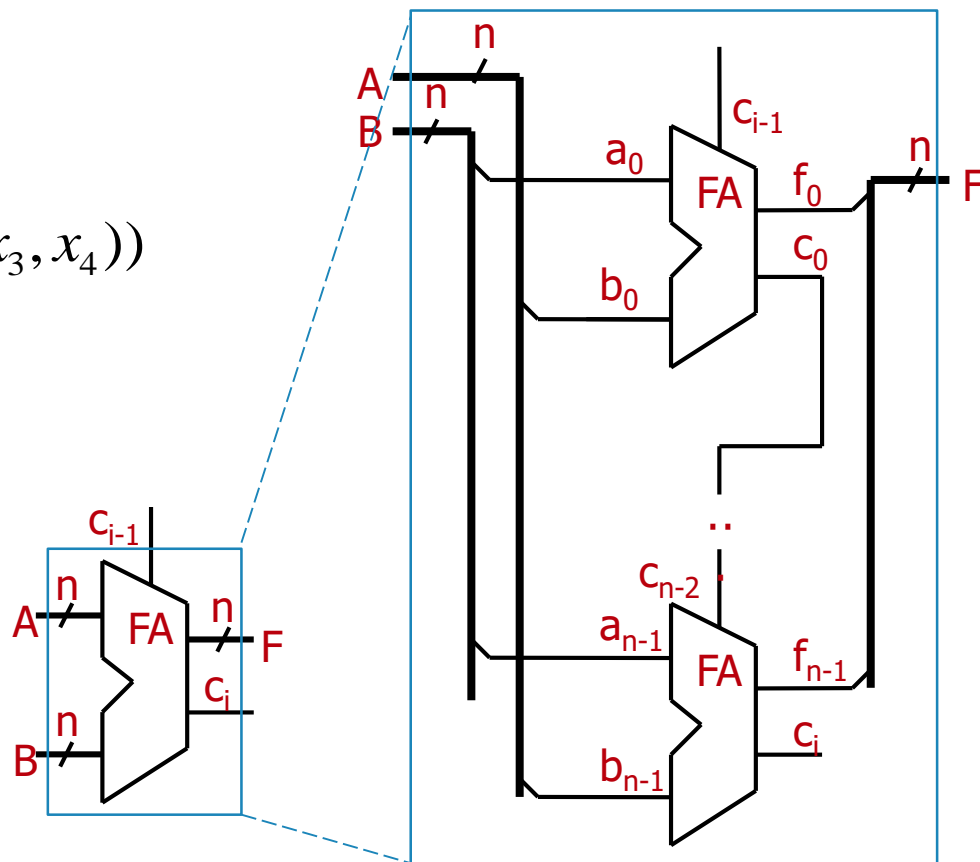
- Iterační

- Typicky vícebitové operace na jednobitové

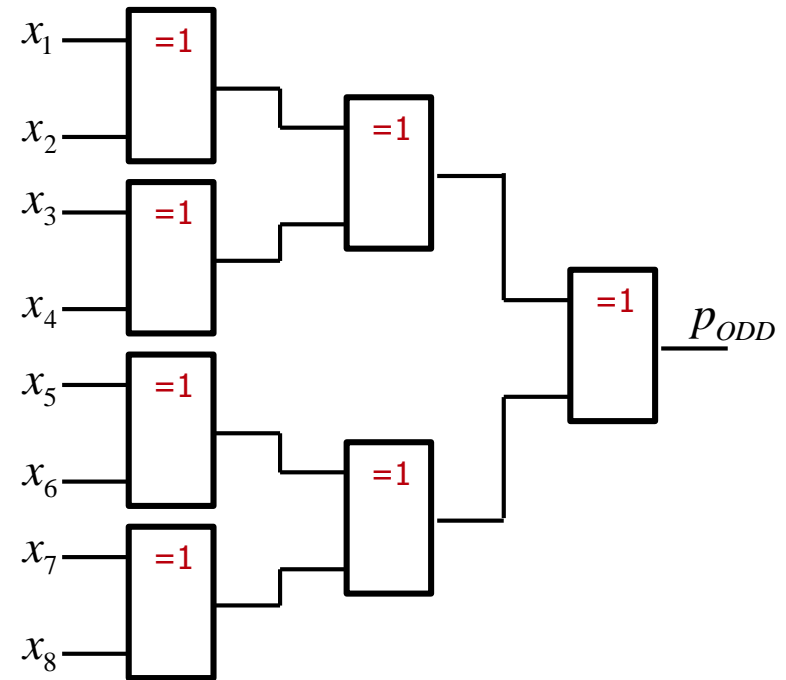
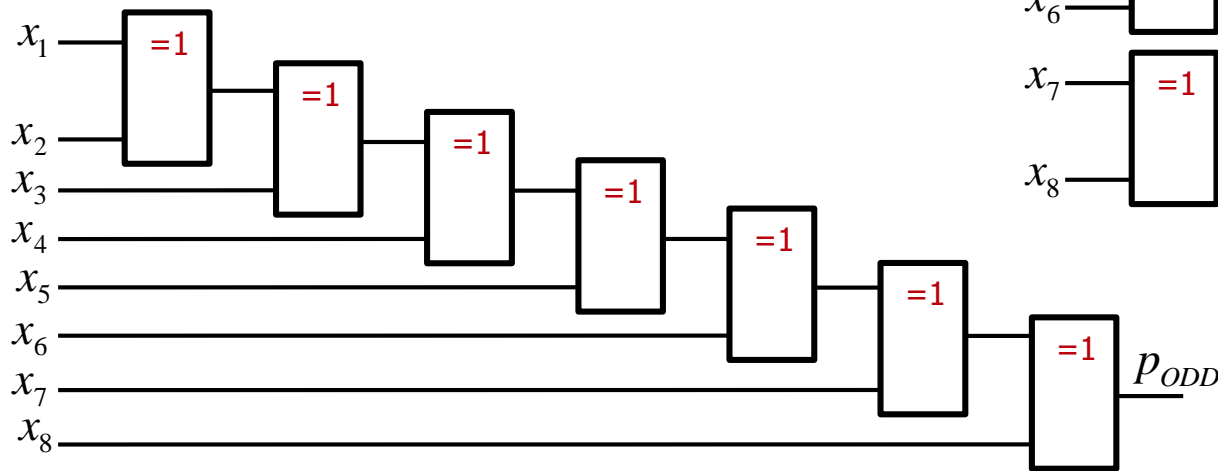
- Např.: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_4(f_3(f_2(f_1(x_1), x_2)), x_3), x_4)$

- Vícenásobný disjunktční rozklad

- Např. n-bitová sčítačka

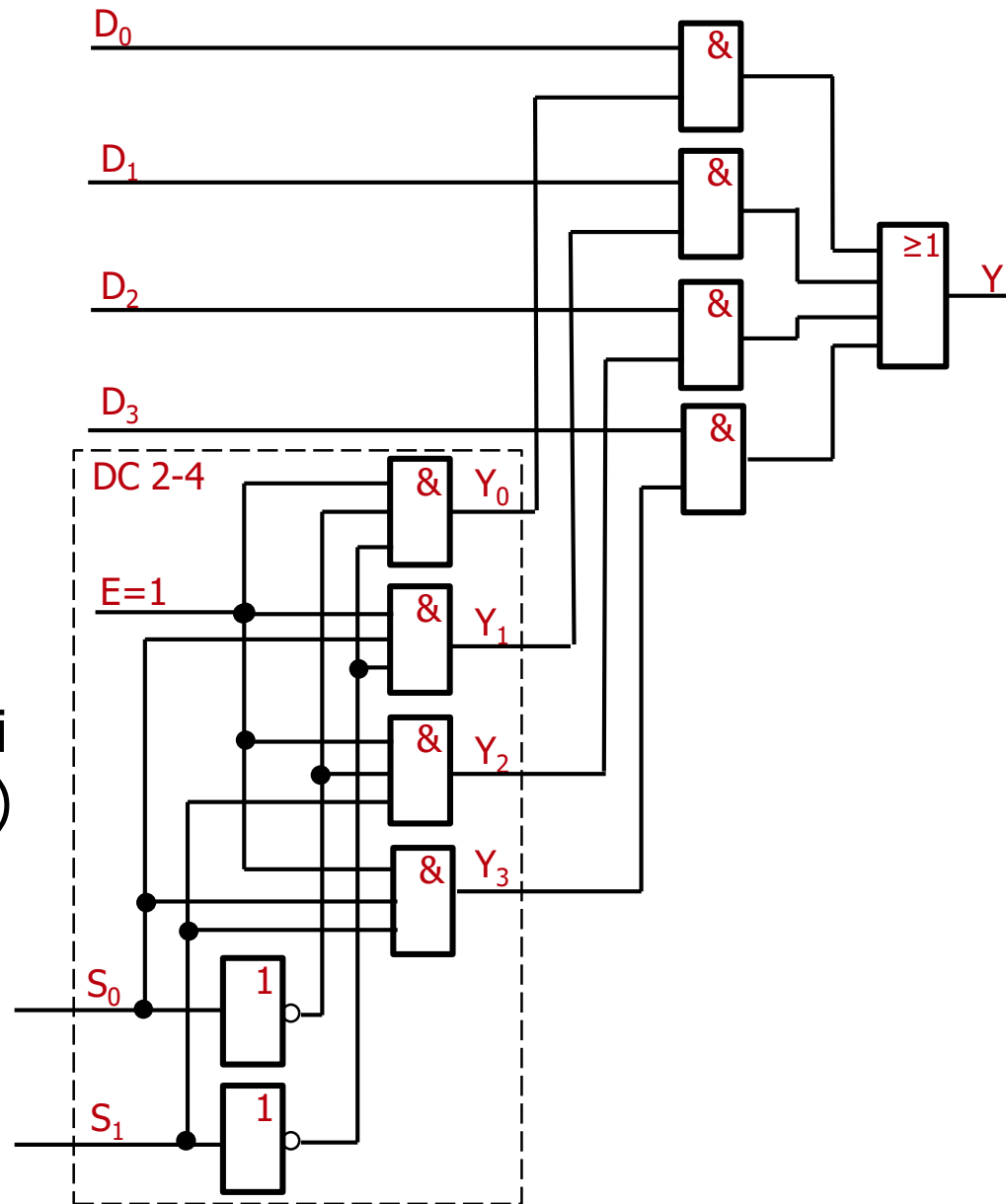


- Příklad generování liché parity
 - Disjunktivní rozklad na podfunkce - stromová struktura
 - Disjunktivní iterační rozklad - kaskádní struktura



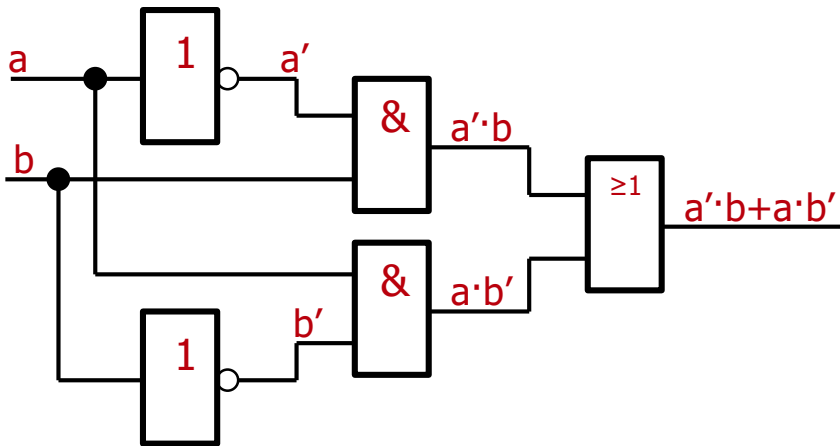
$$P_{ODD}(x_1, \dots, x_8) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_8$$

- Funkční
 - Nejčastěji se provádí intuitivně na základě znalosti chování, které má daná funkce mít
 - Např. multiplexor lze sestavit pomocí dekodéru 2-4 (1 ze 4) s povolovacím (datovým) vstupem E (podrobnosti budou uvedeny později)

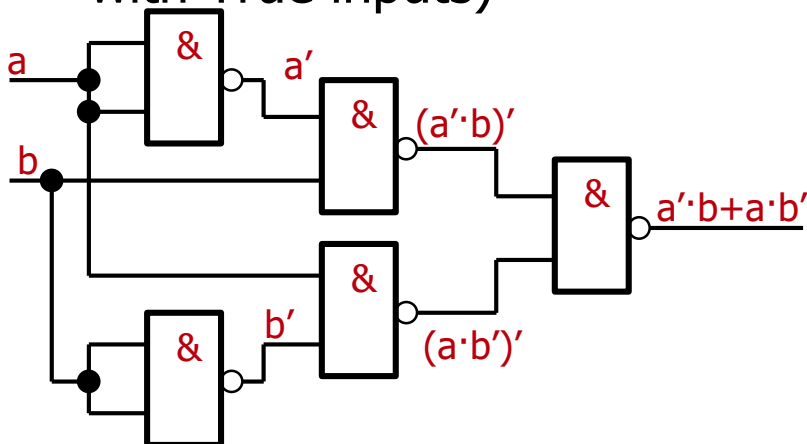


- Realizace normálních forem má tři úrovně

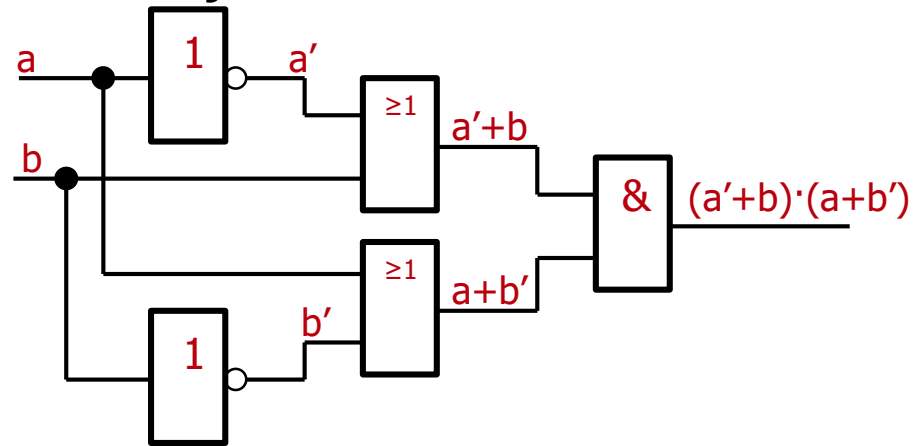
- Disjunktční



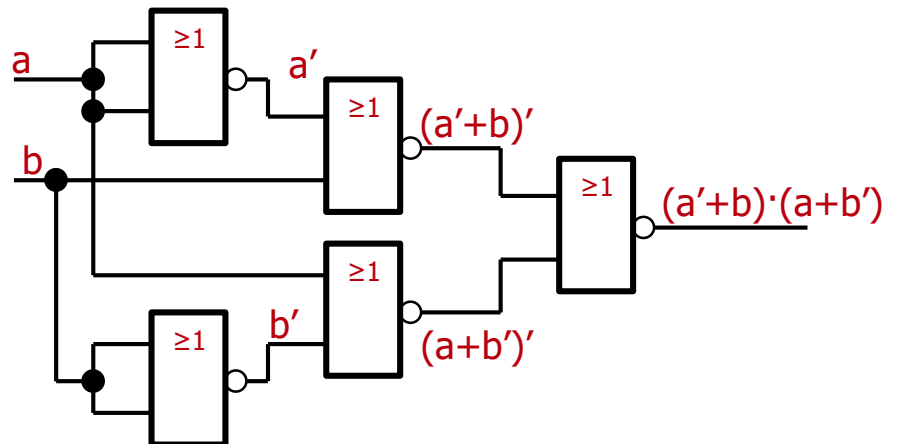
- TANT (Three-level And-Not logic with True inputs)



- Konjunktční

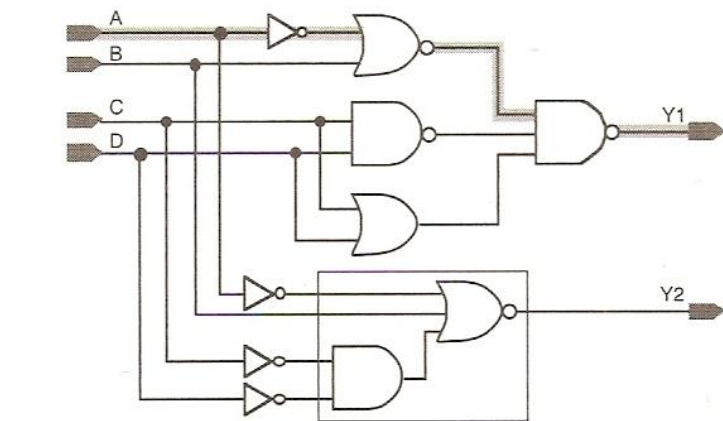


- TONT (Three-level Or-Not logic with True inputs)

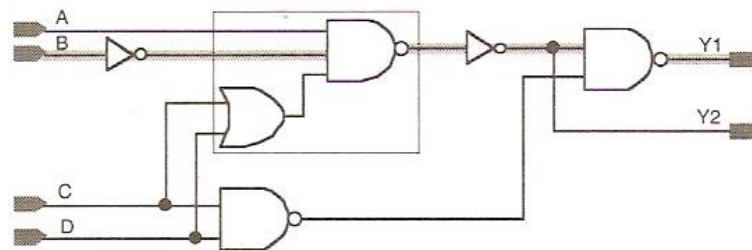


- Hledání společných termů s cílem zjednodušení implementace log. funkce
 - Typicky u funkcí s více výstupy
 - Důsledkem může být větší zpoždění obvodu
 - Využívá distributivní zákon
- Příklad

A	B	C	D	Y1	Y2
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0

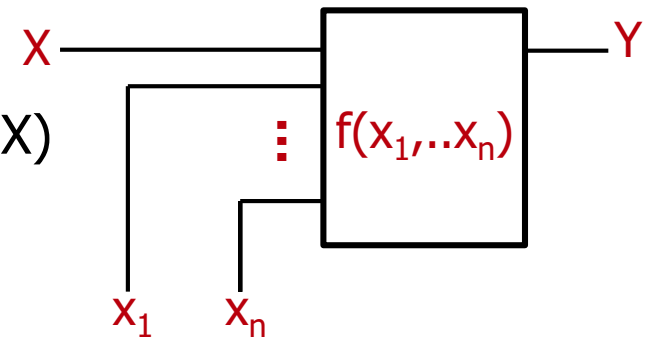


Počet log. členů: 10
Zpoždění: 3 td



Počet log. členů: 5
Zpoždění: 4 td

- Hradlo - logický člen, který má
 - Vstupní proměnné (typicky jedna, např. X)
 - Řídící proměnné, např. vstupy x_1, \dots, x_n
 - Výstupní proměnná, např. Y



- Platí buď

- Hradlo je průchodné $f(x_1, \dots, x_n) = 1 \Rightarrow Y = X$

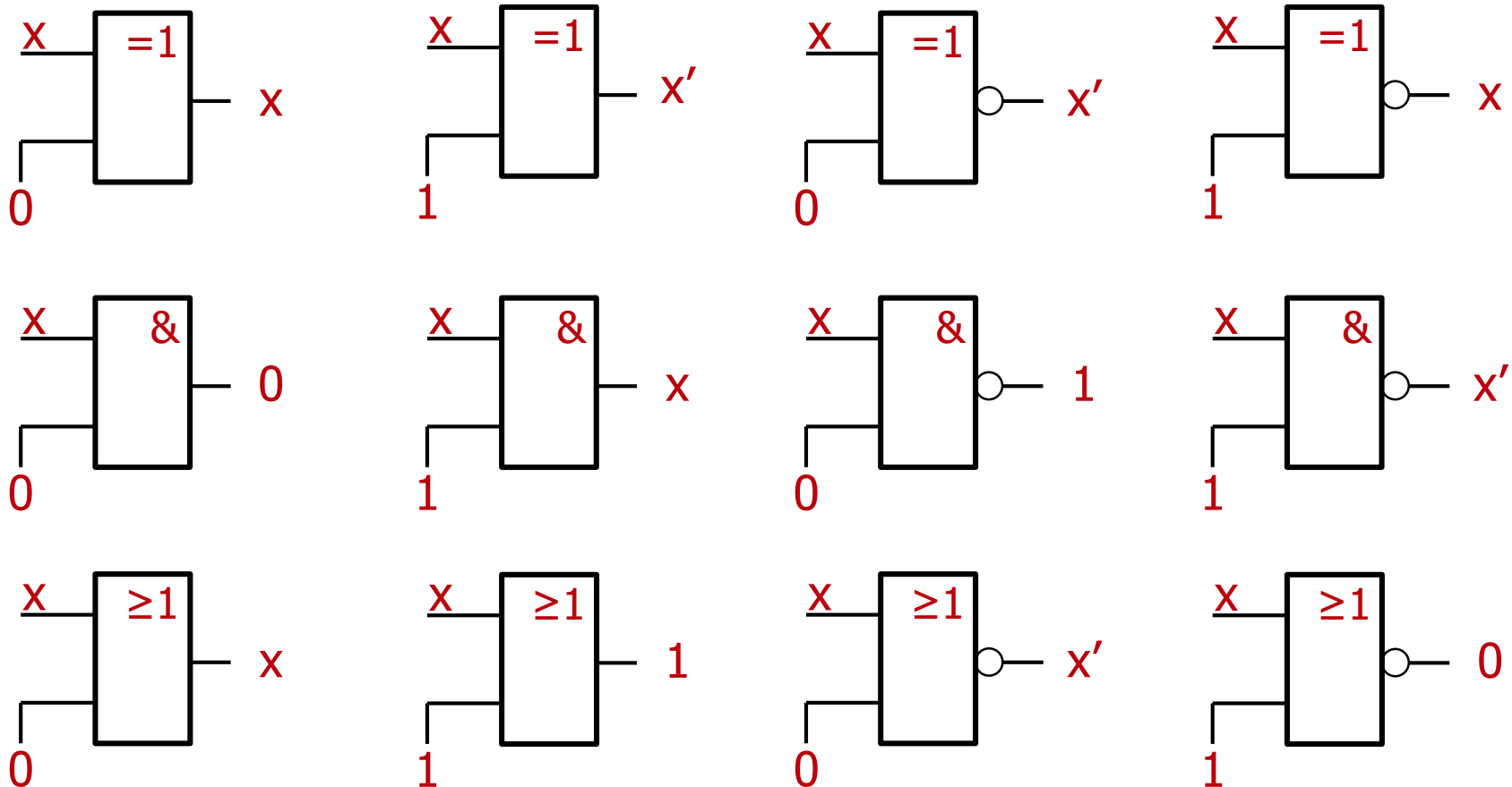
- Hradlo je neprůchodné $f(x_1, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow Y = 0$

- Nebo (tzv. negující hradlo)

- Hradlo je průchodné $f(x_1, \dots, x_n) = 1 \Rightarrow Y = \overline{X}$

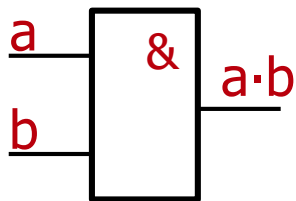
- Hradlo je neprůchodné $f(x_1, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow Y = 1$

- Elementární hradla - mají jen jednu proměnnou
 - Např. log. člen XOR resp. XNOR lze použít jako tzv. řízený invertor – pokud je řídicí vstup 1 resp. 0, pak se hodnota vstupní proměnné na výstupu neguje (generuje její jedničkový doplněk), jinak se nemění

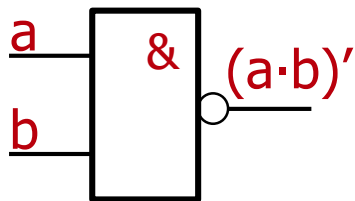


- S využitím DeMorganových zákonů

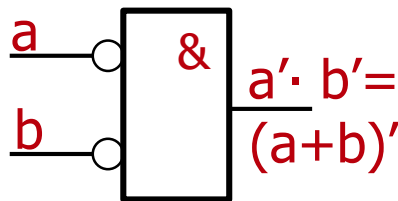
AND



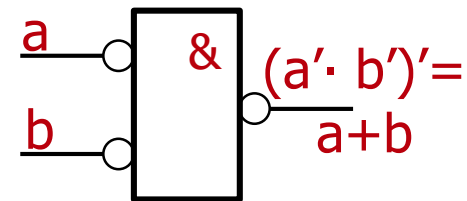
NAND



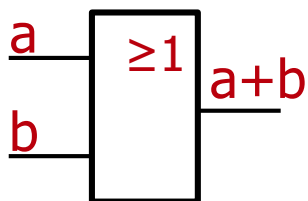
NOR



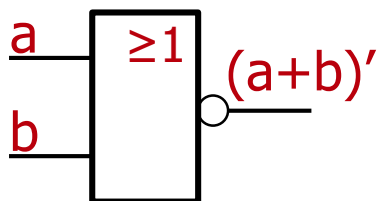
OR



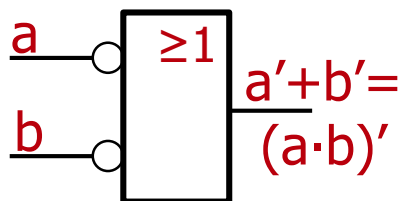
OR



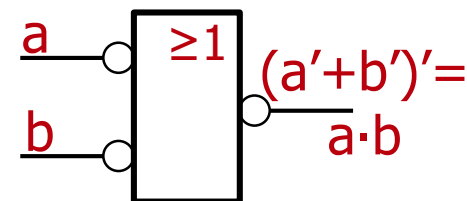
NOR



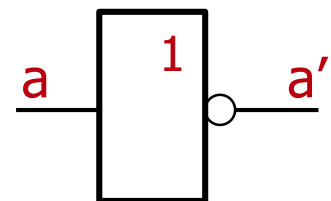
NAND



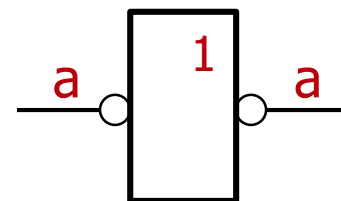
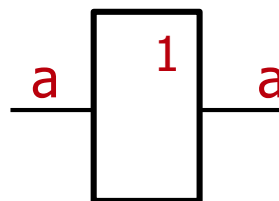
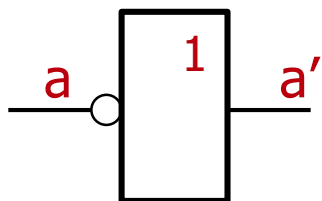
AND



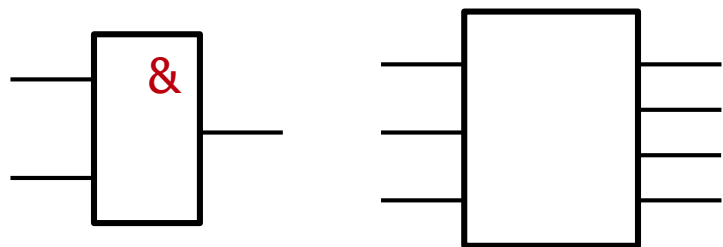
Invertor



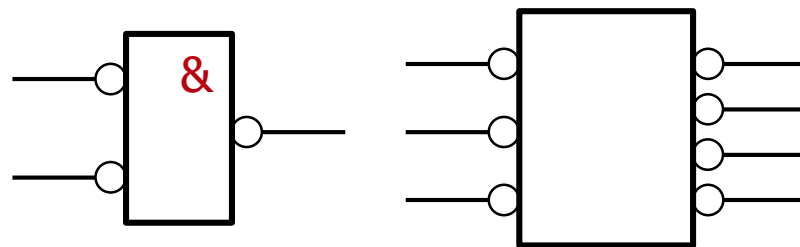
Sledovač (buffer, transfer log. hodnot)



- Signály jsou aktivní v log. 1



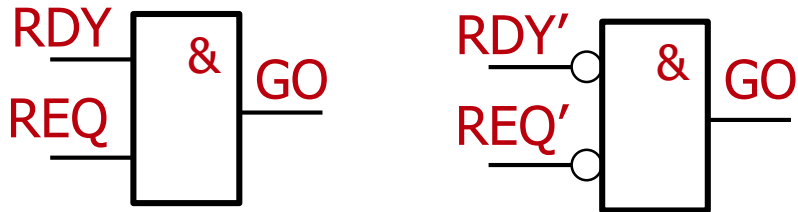
- Signály jsou aktivní v log. 0



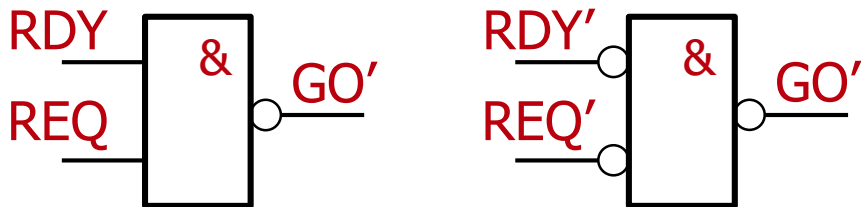
Signál aktivní v log. 0	Signál aktivní v log. 1
READY-	READY+
READY.L	READY.H
READY(L)	READY(H)
READY*	READY
READY'	READY
~READY	READY
/READY	READY
READY_L	READY_H
<u>READY</u>	READY

- Aktivita signálů se volí dle potřeby
 - Lepší čitelnost schématu
 - Technologické důvody apod.
 - V praxi se používají různé způsoby značení aktivních log. úrovní, viz tabulka

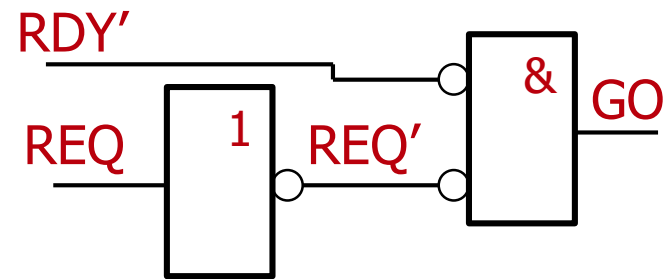
- Funkce GO je aktivní v log.1
 - Vstupy RDY a REQ jsou aktivní v log.1, resp. log.0



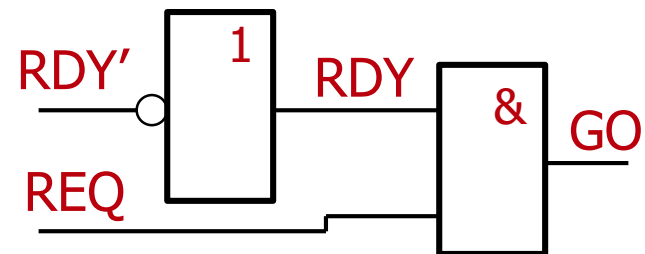
- Funkce GO' je aktivní v log.0
 - Vstupy RDY a REQ jsou aktivní v log.1, resp. log.0



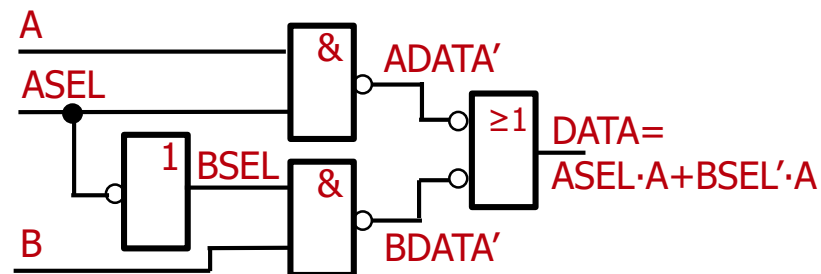
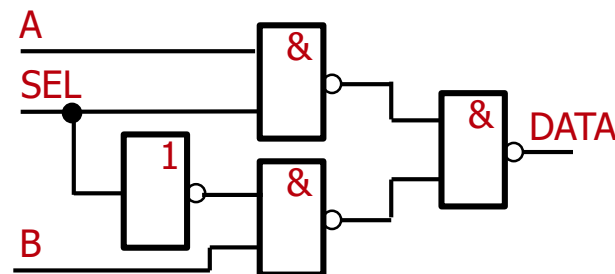
- Funkce GO je aktivní v log.1
 - Vstup RDY' je aktivní v log.0
 - Vstup REQ je aktivní v log.1
 - Realizace pomocí členu AND a invertoru



- Realizace pomocí členu NOR a invertoru



- Schémata log. obvodů je vhodné kreslit s ohledem na snazší pochopení (analýzu) jejich funkce
- Hůře analyzovatelný obvod
 - Realizován (z praktických důvodů) pomocí hradel NAND a invertoru
- Lépe analyzovatelný obvod
 - Je též realizován pomocí hradel NAND a invertoru
 - Signály mezi hradly (výstup - vstup) jsou kresleny buď v negované, nebo přímé podobě (použití DeMorganových zákonů)
 - V každém uzlu obvodu vidíme, jakých log. úrovní bude signál nabývat při aktivním výstupu



- Definice

- n...počet logických proměnných x_0, \dots, x_n
- Každé logické proměnné je přiřazena váha w_i , která určuje významnost dané proměnné x_i (její vliv na výstup)
- Prahová funkce nabývá hodnoty 1, pokud součet hodnot vah těch proměnných, jejichž hodnota je 1, je větší nebo roven hodnotě prahu T

$$f_N^T = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (w_i \cdot x_i) \geq T$$

- Řád prahové funkce je dán součtem hodnot všech vah

$$N = \sum_{i=1}^n w_i$$

• Příklad 1

- $w_a=3, w_b=2, w_c=1$
- $N=3+2+1=6$
- $T=4$

$$f_6^4(3a, 2b, c) = a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$$

a	b	c	$\Sigma(w_i \cdot x_i)$	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 4$
0	0	0	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$	0
0	0	1	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$	0
0	1	0	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$	0
0	1	1	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$	0
1	0	0	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3$	0
1	0	1	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 4$	1
1	1	0	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 5$	1
1	1	1	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6$	1

• Příklad 2

- $w_a=-1, w_b=2, w_c=1$
- $N=-1+2+1=2$
- $T=2$

$$f_2^2(-a, 2b, c) = \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

a	b	c	$\Sigma(w_i \cdot x_i)$	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 2$
0	0	0	$-1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$	0
0	0	1	$-1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$	0
0	1	0	$-1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$	1
0	1	1	$-1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$	1
1	0	0	$-1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -1$	0
1	0	1	$-1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0$	0
1	1	0	$-1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$	0
1	1	1	$-1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$	1

- Definice

- n...počet logických proměnných x_0, \dots, x_n
- Všem logickým proměnným je přiřazena váha $w_i=1$
- Prahová funkce nabývá hodnoty 1, pokud alespoň T vstupních proměnných je rovno 1

$$f_n^T = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq T$$

- Řád symetrické prahové funkce = počet proměnných n

- Příklad

- $w_a=1, w_b=1, w_c=1$
- $N=1+1+1=3$
- $T=2$

a	b	c	Σx_i	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 2$
0	0	0	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$	0
0	0	1	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$	0
0	1	0	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$	0
0	1	1	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$	1
1	0	0	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1$	0
1	0	1	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$	1
1	1	0	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$	1
1	1	1	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$	1

$$f_3^2(a,b,c) = \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$$

$$= a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b$$

- Transformace

- Prahová funkce na logický součet

$$F_n^1(a_1, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

- Příklad

$$w_a=1, w_b=1, w_c=1$$

$$N=1+1+1=3$$

$$T=1 \quad f_3^1(a, b, c) = a + b + c$$

- Prahová funkce na logický součin

$$F_n^n(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

- Příklad

$$w_a=1, w_b=1, w_c=1$$

$$N=1+1+1=3$$

$$T=3 \quad f_3^3(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$$

a	b	c	Σx_i	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 1$
0	0	0	1·0+1·0+1·0=0	0
0	0	1	1·0+1·0+1·1=1	1
0	1	0	1·0+1·1+1·0=1	1
0	1	1	1·0+1·1+1·1=2	1
1	0	0	1·1+1·0+1·0=1	1
1	0	1	1·1+1·0+1·1=2	1
1	1	0	1·1+1·1+1·0=2	1
1	1	1	1·1+1·1+1·1=3	1

a	b	c	Σx_i	$f=1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 3$
0	0	0	1·0+1·0+1·0=0	0
0	0	1	1·0+1·0+1·1=1	0
0	1	0	1·0+1·1+1·0=1	0
0	1	1	1·0+1·1+1·1=2	0
1	0	0	1·1+1·0+1·0=1	0
1	0	1	1·1+1·0+1·1=2	0
1	1	0	1·1+1·1+1·0=2	0
1	1	1	1·1+1·1+1·1=3	1

- Definice

- $n \geq 3$...počet logických proměnných x_0, \dots, x_n
- Všem logickým proměnným je přiřazena váha $w_i = 1$
- Prahová funkce nabývá hodnoty 1, pokud alespoň nadpoloviční většina vstupních proměnných je rovna 1
- = symetrická prahová funkce lichého řádu s prahem $T = \frac{n+1}{2}$

$$M_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{n+1}{2}$$

- Řád majority - počet proměnných n

- Příklad

- $w_a = 1, w_b = 1, w_c = 1$
- $N = 1 + 1 + 1 = 3$
- $T = 2$

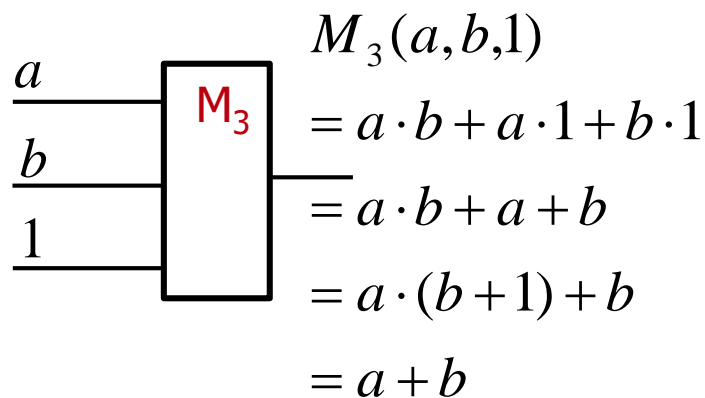
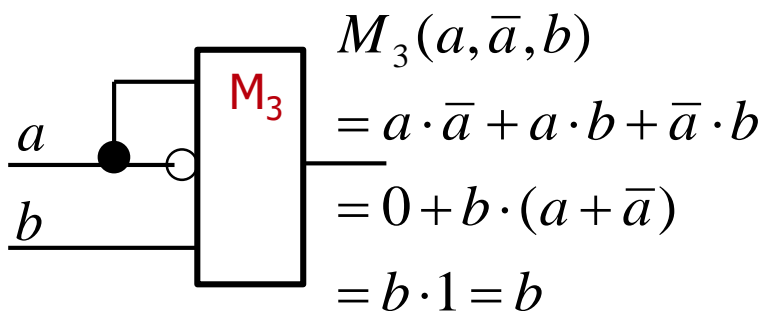
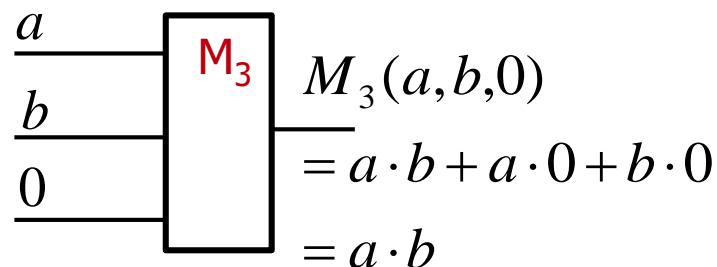
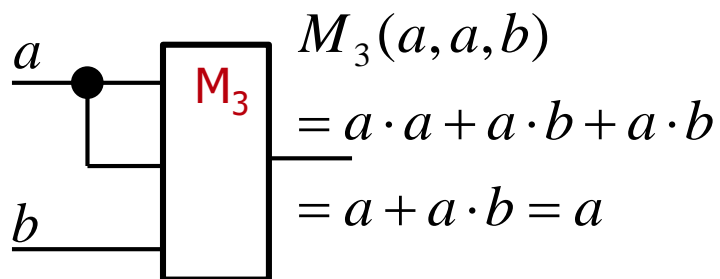
$$M_3(a, b, c)$$

$$= \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$$

$$= a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$$

a	b	c	Σx_i	$M_3 = 1 \Leftrightarrow \Sigma(w_i \cdot x_i) \geq 2$
0	0	0	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$	0
0	0	1	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$	0
0	1	0	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$	0
0	1	1	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$	1
1	0	0	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1$	0
1	0	1	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$	1
1	1	0	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$	1
1	1	1	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$	1

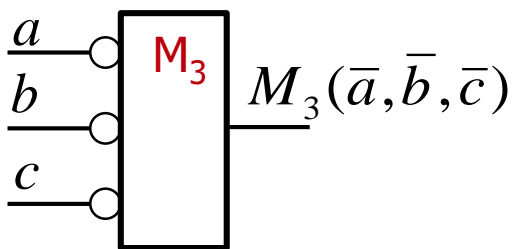
- Příklady



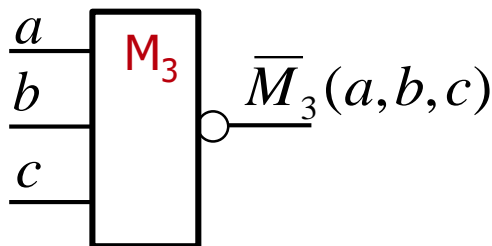
- Příklad

$$M_3(a, b, c) = \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$$

$$M_3(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{M}_3(a, b, c)$$



=



$$\sum m(3,5,6,7) = \prod M(0,1,2,4)$$

a	b	c	$\sum x_i$	$M_3=1 \Leftrightarrow \sum(w_i \cdot x_i) \geq 2$
0	0	0	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$	0
0	0	1	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$	0
0	1	0	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$	0
0	1	1	$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$	1
1	0	0	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1$	0
1	0	1	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$	1
1	1	0	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$	1
1	1	1	$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$	1